

Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a VII-a

Subiecte

Varianta 3

1. Aflați valoarea minimă a sumei:

$$|xy - 2x + y - 2| + |-xy + x - y + 1| + |3x + 3|$$

2. Arătați că

$$8 \leq \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} \leq 12.$$

3. Fie $ABCD$ un pătrat și M mijlocul lui $[AB]$. Dacă

$$\{N\} = DM \cap AC, \{P\} = DM \cap BC, \{O\} = AC \cap BD \text{ și } \{E\} = PO \cap AB \text{ demonstrați că}$$

$$18 \cdot \text{aria}[NOE] = \text{aria}[ABCD].$$

Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $M \in [AD]$. Construim $AE \perp MC, E \in MC$ și $DF \perp MB, F \in MB$. Fie $AE \cap DF = \{G\}$ și $MN \perp BC$. Arătați că punctele G, M, N sunt coliniare

4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $M \in [AD]$. Construim $AE \perp MC, E \in MC$ și $DF \perp MB, F \in MB$. Fie $AE \cap DF = \{G\}$ și $MN \perp BC$. Arătați că punctele G, M, N sunt coliniare

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2013

Clasa a VII-a

VARIANTA 3

BAREM DE CORECTARE:

I. $|xy - 2x + y - 2| + |-xy + x - y + 1| + |3x + 3| =$
 $= |(x+1)(y-2)| + |(1-y)(x+1)| + 3|x+1|$ **2 pcte**
 $= |x+1| \cdot (|y-2| + |1-y| + 3)$ **2 pcte**
 Deoarece $|x+1| \geq 0$ și $|y-2| + |1-y| + 3 > 0$ **2 pcte**
 valoarea minimă a expresiei este 0 se realizează pt $x+1 = 0$ deci pentru $x = -1$.
1 pct

II. Din $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1+2}{\sqrt{1 \cdot 2}} \geq 2$ **2 pcte**

$\frac{5}{\sqrt{6}} \geq 2, \frac{9}{\sqrt{20}} \geq 2$, adunăm relațiile $\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} \geq 8$ (1) **1 pct**

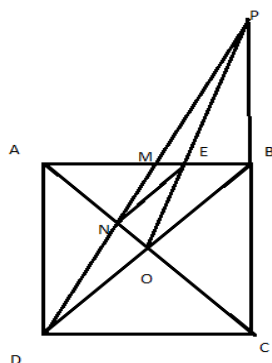
Pentru a doua inegalitate folosim relația $n(n+1) \geq n^2$ pentru $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} < \frac{3}{1}; \frac{5}{\sqrt{6}} < \frac{5}{2}; \frac{7}{\sqrt{12}} < \frac{7}{3}$ și $\frac{9}{\sqrt{20}} < \frac{9}{4}$ **2 pcte**

$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} < \frac{3}{1} + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} < 12$ (2) **2 pcte**

Din (1) și (2) \Rightarrow relația cerută.

III.



$A[ABCD] = 18 \cdot A[NOE]$

În $\triangle BDA$ cu AO și DM mediană $\Rightarrow N$ centru de greutate $\Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{1}{3}$ (1) **2 pcte**

În $\triangle DBP$, PO și BM sunt mediane, rezultă E este centrul de greutate al triunghiului și

atunci $\frac{BE}{BM} = \frac{2}{3}$.

De aici $\frac{BE}{2 \cdot BM} = \frac{1}{3}$, adică $\frac{BE}{BA} = \frac{1}{3}$ (2)

2 pcte

Din (1) și (2), cu teorema reciprocă a lui Thales deducem că $NE \parallel OB$ și cum $OB \perp OA$ rezultă $NE \perp NO$.

Cu aceasta avem $A\Delta NOE = \frac{NE \cdot ON}{2}$. 1 pct

Din ΔANE dreptunghic isoscel obținem $NE = AN = \frac{2}{3} \cdot AO$ și cum din (1)

$NO = \frac{1}{3} \cdot AO$ deducem că

$$A\Delta NOE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AO \cdot \frac{1}{3} \cdot AO = \frac{1}{9} \cdot AO^2 = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{AC^2}{2} = \frac{1}{18} \cdot A_{ABCD}.$$

2 pte.

IV. Din $\Delta EAM \sim \Delta DCM$ (sunt dreptunghice și $\sphericalangle EMA \equiv \sphericalangle DMC$) obținem

$$\frac{AM}{MC} = \frac{EM}{MD}, (1) \quad 1 \text{ pct}$$

Analog, $\Delta FMD \sim \Delta AMB$, de unde $\frac{FM}{AM} = \frac{MD}{MB}, (2)$ 1 pct

Înmulțind relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{FM}{MC} = \frac{EM}{MB}$. Cum $\sphericalangle EMF \equiv \sphericalangle BMC$ deducem că

$$\Delta FME \sim \Delta CMB, \text{ de unde } \sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle BCM (3) \quad 1 \text{ pct}$$

Deoarece patrulaterul EGFM este inscriptibil (are două unghiuri opuse de 90°) rezultă $\sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle MGE, (4)$. 1 pct

Din (3) și (4) avem $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle MGE (5)$ 1 pct

Din ΔNMC avem $m(\sphericalangle NMC) = 90^\circ - m(\sphericalangle BCM)$, iar din ΔEMG avem $m(\sphericalangle EMG) = 90^\circ - m(\sphericalangle MGE)$.

Folosind (5) rezultă $\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle EMG$ și din teorema reciproca a unghiurilor opuse la varf rezultă că punctele G, M, N sunt coliniare. 2 pct.

NOTĂ:

Orice soluție corectă se punctează corespunzător.