Inspectoratul Școlar Județean Bihor | Societatea de Științe Matematice din România Filiala Bihor | MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, $O_2 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că dacă $A \in G$ şi $\det(A) = \widehat{0}$, atunci $A = O_2$;

b) Demonstraţi că $G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă faţă de înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$;

c) Stabiliţi dacă ecuaţia $X^{12} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$, are soluţii în mulţimea G.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $\mathrm{Z}(G) = \{x \in G : xy = yx, \ \forall\, y \in G\}$. Să se arate că dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus \mathrm{Z}(G)$, atunci grupul este comutativ.

PROBLEMA 3. Fie funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} \mathrm{d}t$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2} \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci $\det(A) = a^2 + b^2$. Cum $x^2 \in \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}\right\}, \forall\, x \in \mathbb{Z}_7$, obţinem că $a^2 + b^2 = \widehat{0} \Leftrightarrow a = b = \widehat{0}$, adică $A = O_2$

(2p) b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$ şi $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$, atunci

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \in G.$

Din $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq \widehat{0}$, obţinem că $A \cdot B \neq O_2$, adică $A \cdot B \in G \setminus \{O_2\}$

(1p) c) Observăm că $(G \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este un grup finit de ordinul 48.

$\left(\text{elementul neutru este } I_2, \text{ şi } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}\right)$

(2p) Aşadar, $X^{48} = I_2, \forall\, X \in G \setminus \{O_2\}$.

Matricea $B = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ satisface relaţia $B^4 = -I_2$

Astfel, dacă $X \in G \setminus \{O_2\}$, şi $X^{12} = B \Rightarrow X^{48} = B^4 \Rightarrow I_2 = -I_2$ Contradicţie.

Deci, ecuaţia dată nu are soluţii în mulţimea G.

PROBLEMA 2.

Fie $x, y \in G$.

(1p) Dacă cel puţin unul dintre x şi y este din $\mathrm{Z}(G)$, atunci $xy = yx$.

Dacă $x, y \in G \setminus \mathrm{Z}(G)$, atunci $x^2 = y^2 = e$ şi avem următoarele cazuri:

(3p) dacă $xy \in \mathrm{Z}(G) \Rightarrow x(xy)y = (xy)xy = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

(3p) dacă $xy \notin \mathrm{Z}(G) \Rightarrow x^2y^2 = (xy)^2 = e \Rightarrow x(xy)y = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

PROBLEMA 3.

(2p) $f\left(e^t\right)=\begin{cases} e^t, & \text{dacă } t\le 0 \\ e^t-1, & \text{dacă } t>0 \end{cases}$; $f\left(e^{-t}\right)=\begin{cases} e^{-t}, & \text{dacă } t\ge 0 \\ e^{-t}-1, & \text{dacă } t<0 \end{cases}$

(2p) Pentru $t\in[0,1]$, avem $g(t)=\dfrac{f\left(e^t\right)}{f\left(e^{-t}\right)}=\begin{cases} 1, & t=0 \\ e^{2t}-e^t, & 0<t\le 1 \end{cases}$

(2p) Funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ este mărginită şi continuă pe $(0,1]$, deci este integrabilă şi $\displaystyle\int_0^1 \frac{f\left(e^t\right)}{f\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(e^{2t}-e^t\right)\mathrm{d}t$

(1p) $\displaystyle\int_0^1\left(e^{2t}-e^t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(e-1)^2$

PROBLEMA 4.

(2p) Prin descompunerea funcţiei raţionale $f(x)=\dfrac{(1+x)^n+(1-x)^n}{1+x^2}$ în fracţii raţionale simple, obţinem $f(x)=A(x)+\dfrac{px+q}{1+x^2}$, unde $p,q\in\mathbb{Z}$.

(1p) Din $(1+x)^n+(1-x)^n=\left(1+x^2\right)\cdot A(x)+px+q$, obţinem

$$\begin{cases} (1+i)^n+(1-i)^n = p\,i+q \\ (1-i)^n+(1+i)^n = -p\,i+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=(1-i)^n+(1+i)^n \end{cases}$$

(1p) $q=\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\ \sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n+\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\ \sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\cos\dfrac{n\pi}{4}$

(1p) Avem $I_n=\displaystyle\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

(1p) unde $\displaystyle\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x\in\mathbb{Q}$ şi $\displaystyle\int_0^1\frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$

(1p) Aşadar, $I_n\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\displaystyle\int_0^1\frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\cos\frac{n\pi}{4}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\cos\frac{n\pi}{4}=0$, de unde obţinem că $n\in\{4k+2:k\in\mathbb{N}\}$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.