Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A X-A

15 februarie 2015

Problema 1:

a) Arătați că $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

b) Dacă a,b,c,d $\in (1,\infty)$ arătați că $log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + log_b \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + log_c \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} + log_d \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq 4$

Problema 2:

Fie $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^* \to \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{inclus\ in}\ \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ax^3+1}}{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$**.** Să se determine **a și M** încât funcția f să fie bijectivă

Problema 3:

Fie $z_1, z_2, \ldots, z_{2015} \in \mathbb{C}$. Arătați că dacă$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{2015}|^2 = R_e(z_1z_2 + z_2z_3 + \cdots + z_{2015}z_1)$ atunci numerele $z_1 + z_2 + \ldots + z_{2015}$ și $z_1z_2 \ldots z_{2015}$ sunt reale.

Problema 4:

Fie $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $g(x) \leq -g\left(\frac{1}{x}\right), \forall\ x \in (0,\infty)$.

Să se determine funcțiile f: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile:

a)$f(x) \leq g(x), \forall\ x \in (0,\infty)$

b) $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall\ x,y \in (0,\infty)$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problema are 7 puncte

SOLUTII SI BAREM
CLASA A X - A
ETAPA LOCALĂ 15.02.2015

Problema 1:

a) $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ **(2p)**

b) $Folosind\ punctul\ a)\ avem\ log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \geq log_a \frac{b+c+d}{3} \geq log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{1}{3}(\ log_a b + log_a c + log_a d)$
(3p)

Corespunzător se scriu celelalte trei inegalități și se însumează; notând cu A membrul stâng al inegalității de demonstrat obținem:

$A \geq \frac{1}{3}\sum(\ log_a b + log_b a) \geq \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4$
(2p)

Problema 2:

$$\boldsymbol{f(x_1) - f(x_2) = \frac{ax_1{}^3+1}{x_1} - \frac{ax_2{}^3+1}{x_2} = ax_1{}^2 - ax_2{}^2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}$$
$$\boldsymbol{= a(x_1-x_2)(x_1+x_2) - \frac{x_1-x_2}{x_1x_2} =}$$
$$\boldsymbol{\frac{[a(x_1+x_2)x_1x_2-1](x_1x_2)}{x_1x_2}}$$

(1p)

Dacă a =0 și $f(x_1) = f(x_2)\ rezultă\ x_1 = x_2$ deci funcția f este injectivă
(1p)

Dacă $a \neq 0, există\ a, x_1, x_2, x_1 \neq x_2\ astfel$ încât $a(x_1+x_2)x_1x_2 - 1 = 0$ adică $f(x_1) = f(x_2)$ și f nu ar fi injectivă. Justificăm afirmația:

Fie s = $x_1 + x_2$ și p=x_1x_2 obținem asp-1=0 sau sp = $\frac{1}{a}$.

Ecuația de gradul al doliea cu rădăcinile x_1 $și$ x_2 este $x^2 - sx + p = 0$.

Alegem $s = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$ și $p = \frac{2}{2\sqrt[3]{a^2}}$ Atunci discriminantul ecuației

$\Delta = s^2 - 4p = \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} > 0$, deci rădăcinile x_1 $și$ x_2 sunt reale și $x_1 \neq x_2$**(3 p)**

Concluzionăm că $f(x) = \frac{1}{x}, f: \mathbb{R}^* \to M$

Ecuația $f(x) = y$ are $soluția$ $x = \frac{1}{y}, y \in \mathbb{R}^*$ deci funcția este surjectivă, astfel că este bijectivă.

(1p)

Deoarece $y \in \mathbb{R}^*$ rezultă M=$\mathbb{R}^*$

(1p)

Problema 3:

Fie $z_k = a_k + i\, b_k, k = \overline{1,2015}, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$

$\sum_{k=1}^{2015} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{2015} \left({a_k}^2 + {b_k}^2\right); Re(z_k z_{k+1}) = a_k a_{k+1} - b_k b_{k+1}, k = \overline{1,2015}, b_{2016} = b_{1,} a_{2016} = a_1$

(1p)

Egalitatea din enunț devine: ${a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_{2015}}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_{2015}}^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{2015} a_1 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - \cdots - b_{2015} b_1$ sau

(1p)

$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_{2015} - a_1)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (b_2 + b_3)^2 + \ldots + (b_{2015} + b_1)^2 = 0$

(2p)

Și de aici : $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2015} = a \in \mathbb{R}$ și $b_1 = b_2 = \cdots = b_{2015} = 0$

(2p)

Rezultă $z_1 + \ldots + z_{2015} = 2015a \in \mathbb{R}$ $z_1 \ldots z_{2015} = a^{2015} \in \mathbb{R}$

(1p)

Problema 4:

În b) înlocuim x și y cu 1: $f(1) + f(1) \geq f(1) \Rightarrow f(1) \geq 0$

(1p)

În a) înlocuim x cu $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq g\left(\frac{1}{x}\right)$. Din proprietatea funcției date g deducem

$g\left(\frac{1}{x}\right) \leq -g(x)\ și\ rezultă\ f\left(\frac{1}{x}\right) \leq -g(x)\ adică - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq g(x)$ (1)

(2p)

Din condiția b) găsim $f(1) \leq f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\ prin\ înlocuirea\ lui\ y\ cu\ \frac{1}{x}$. Cum $f(1) \geq 0$

Rezultă $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ (2)

(2p)

Adunăm inegalitățile (1) și (2) și rezultă $f(x) \geq g(x)$.

(1p)

Având în vedere a), obținem $f(x) = g(x)$ este singura funcțe care satisfice condițiile date.