OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a X-a

SUBIECTUL 1.

Rezolvați în $(0;+\infty)$ ecuația $a^x \cdot \log_a x = b^x \cdot \log_b x$, unde $a > b > 1$.

***

SUBIECTUL 2.

Fie $a \in R$, $a < \frac{1}{4}$. Arătați că ecuația $\sqrt{a+\sqrt{x+a}} = x$ nu are soluții în *R*.

Dorin Arventiev

SUBIECTUL 3.

Fie A o mulțime nevidă și finită de numere reale și $f : A \to A$ o funcție cu proprietatea $(f \circ f)(x) = 2015 \cdot f(x) - 2014 \cdot x, (\forall) x \in A$.

a) Arătați că funcția *f* este injectivă;
b) Determinați funcția *f*.

***

SUBIECTUL 4.

Fie $n \in N, n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, ..., z_n \in C$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

a) Demonstrați că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n \cdot |z|^2 + n$ pentru orice $z \in C$.
b) Demonstrați că $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$ pentru orice $z \in C$, $|z| \leq 1$.

GMB

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a X-a

<u>Barem de corectare și notare</u>

Subiectul 1.

$a^x \log_a x = b^x \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \Leftrightarrow x = 1$ **2p**

Sau

$a^x = \dfrac{b^x}{\log_a b} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \log_b a$

$x = \log_{\frac{a}{b}}\left(\log_b a\right) \in (0; +\infty)$ **5p**

Subiectul 2.

Evident $x > 0$. **1p**

Din $x^2 - x - a > 0, (\forall) x \in R, (\Delta = 1 + 4a < 0)$..................**2p**

$x^2 > x + a \Rightarrow \sqrt{x+a} < x$

Dacă $x \to \sqrt{x+a}$, $\sqrt{a + \sqrt{x+a}} < \sqrt{x+a} < x$

Deci $\sqrt{a + \sqrt{x+a}} < x$, ...**4p**

Subiectul 3.

a) Fie $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow$ **1p**

$\Rightarrow 2015 f(a) - 2104a = 2015 f(b) - 2014b \Rightarrow -2104a = -2014b \Rightarrow a = b$, deci injectivitatea...... **1p**

b) Funcția *f* este injectivă iar mulțimea *A* este finită deci funcția este bijectivă. **1p**

$f(x) = \dfrac{f(f(x)) + 2014x}{2015} \Rightarrow f(x) \le \max\{x,\ f(f(x))\}, \forall x \in A$ **(1)** **1p**

Presupunem că $f(a) = \max A \overset{\overbrace{}^{notăm}}{=} m \Rightarrow f(a) \ge a$. Din **(1)** avem că $f(a) \le \max\{a,\ f(f(a))\}$, deci $m \le \max\{a,\ f(f(a))\} \Rightarrow m = a \ sau \ m = f(f(a))$. Dacă $m = f(f(a)) \Rightarrow f(a) = f(f(a)) \Rightarrow a = f(a)$.

Așadar avem că $f(a) = a$ **2p**

Analog $f(x) = x, \forall x \in A$ **1p**

Subiectul 4.

a) Folosim $u \cdot \overline{u} = |u|^2$ și deducem că

$|z - z_1|^2 + \cdots + |z - z_n|^2 = (z - z_1)\left(\overline{z - z_1}\right) + \cdots + (z - z_n)\left(\overline{z - z_n}\right) =$ **1p**

$= |z|^2 - \overline{z} \cdot z_1 - z \cdot \overline{z_1} + |z_1|^2 + \cdots + |z|^2 - \overline{z} \cdot z_n - z \cdot \overline{z_n} + |z_n|^2 =$ **1p**

$= n|z|^2 + n - z \cdot \left(\underbrace{\overline{z_1 + \cdots + z_n}}_{0}\right) - \overline{z} \cdot \left(\underbrace{z_1 + \cdots + z_n}_{0}\right) = n|z|^2 + n$ **2p**

b) $\left(1 \cdot |z - z_1| + \ldots + 1 \cdot |z - z_n|\right)^2 \le n\left(|z - z_1|^2 + \ldots + |z - z_n|^2\right) = n\left(n|z|^2 + n\right) \le 2n^2$ **2p**

deci $|z - z_1| + \cdots + |z - z_n| \le n\sqrt{2}$ **1p**

<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim.