# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
## CLASA a XII - a
## SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Enunț subiect 1, autor prof. Marcel Țena, C.N.S.S..

1. Fie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ un endomorrfism al grupului $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

a) Determinați $f(-1)$

b) Să se determine toate endomorfismele $f$ cu proprietarea că $f(p) = p$, pentru orice $p > 0$, $p$ număr prim.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|---|
| Fie $q \in Q^*$. Atunci $q$ se poate scrie ca $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere naturale prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt numere întregi. | 1p |
| $f(q) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdot (f(p_2))^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (f(p_k))^{\alpha_k} = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = q$ <br> Deci $f(q) = q$, pentru orice $q > 0$. | 1p |
| Deoarece $(-1)^2 = 1$, avem $f((-1)^2) = f(1)$, deci $(f(-1))^2 = f(1) = 1$, <br> deci $f(-1) = \pm 1$. | 1p |
| $f(-1) = 1$, de unde $f(q) = f(-r) = f(-1)f(r) = r = -q$. <br> Atunci, pentru orice $q \in Q^*$, $f(q) = \begin{cases} q, & \text{pentru } q > 0 \\ -q, & \text{pentru } q < 0 \end{cases} = \lvert q \rvert$. <br> Funcția f este endomorfism . | 2p |
| $f(-1) = -1$, de unde $f(q) = f(-r) = f(-1) \cdot f(r) = -r = q$, deci $f(q) = q$, pentru orice $q \in Q^*$. | 2p |

Enunț subiect 2, autor *** , GM nr 9/2014

Fie $a$ un număr real fixat și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și nu se anulează.

Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \le a \\ 2f(x), & x > a \end{cases}$, nu are primitive.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|---|
| Fie $F : R \to R$ o primitivă a lui $f$. Să presupunem că $g$ are o primitivă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. | 2p |

| | |
|---|---|
| Atunci $G(x) = \begin{cases} F(x)+C_1, & x \le a \\ 2\cdot F(x)+C_2, & x > a \end{cases}$ | |
| $G$ este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, deci continuă în punctul $a$, deci $\lim\limits_{x\nearrow a} G(x) = \lim\limits_{x\searrow a} G(x) = G(a)$ de unde $F(a) + C_1 = 2F(a) + C_2$ | 1p |
| $G$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci și în punctul $a$, de unde $\lim\limits_{x\nearrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\searrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = g(a) = f(a)$. | 1p |
| $\lim\limits_{x\nearrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\nearrow a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$. | 1p |
| $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\searrow a}\frac{2\cdot F(x)+C_2-F(a)-C_1}{x-a} = \lim\limits_{x\searrow a}\frac{2\cdot(F(x)-F(a))}{x-a} = 2\cdot F'(a) = 2\cdot f(a)$ | 1p |
| Obținem $f(a) = 2f(a)$, de unde $f(a) = 0$, imposibil | 1p |

Enunț subiect 3, autor****

Fie $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$

a) Să se arate că $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $n \ge 1$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot I_n)$.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
|---|---|
| $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = -\cos x \cdot (\sin x)^{n-1}\Big\vert_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^{n-2}\cdot(1-\sin^2 x)dx$ | 2p |
| Deci $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, de unde $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ | 1p |
| Avem și $(n+1)I_nI_{n+1} = nI_nI_{n-1}$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, de unde $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $n$ natural | 1p |
| Avem $I_{n+1} < I_n$, de unde $(n+1)I_{n+1}I_n < (n+1)I_n^2$, deci $I_n > \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$. Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n) = \infty$. | 3p |

Enunț subiect 4, autor****

a) Pe mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[145]{145}\}$ să se introducă două structuri : una de grup comutativ și una de grup necomutativ.

b) Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și notăm $H = (a, b)$. Să se introducă pe $H$ o structură de grup comutativ.

| Detalii rezolvare | Barem asociat |
| --- | --- |
| a) $\lvert A\rvert = 144$. Vom aplica teorema de transport a structurii de grup.<br>Cazul comutativ. Grupul $(\mathbb{Z}_{144},+)$ este comutativ. Funcția<br>$f : A \to \mathbb{Z}_{144}, f(\sqrt{2}) = \overline{0}, f(\sqrt[3]{3}) = \overline{1}, ..., f(\sqrt[145]{145}) = \overline{143}, unde\ \mathbb{Z}_{144} = \{\overline{0},...,\overline{143}\}$<br>este bijectivă, deci există o unică structură de grup pe $A$ pentru care $f$ realizează izomorfismul. | 2p |
| Cazul necomutativ<br>$144 = 3!\cdot 4!$ Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $(S_n, \circ)$ grupul permutărilor de grad $n$. Considerăm grupul produs direct $(S_3 \times S_4, \cdot)$, unde operația $\cdot$ se definește astfel :<br>$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$, $x_1, x_2 \in S_3$, $y_1, y_2 \in S_4$. Avem<br>$\lvert S_3\rvert = 3!, \lvert S_4\rvert = 4! \Rightarrow \lvert S_3 \times S_4\rvert = 3!\cdot 4! = 144 = \lvert A\rvert$. Grupul $(S_3 \times S_4, \cdot)$ este necomutativ<br>( este suficient ca un factor să fie necomutativ, în cazul nostru chiar ambele sunt necomutative) și aplicăm teorema de transport a structurii. Deci $A$ devine grup necomutativ. | 3p |
| b) Funcția $h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $h(x) = ctg\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ este bijectivă și aplicăm teorema de transport a structurii din grupul comutativ $(\mathbb{R},+)$ la $(a,b)$:<br>$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \circ x_2 = h^{-1}(h(x_1) + h(x_2))$, deci $((a,b),\circ)$ este grup comutativ. | 2p |