

COLEGIUL NAŢIONAL

# “ŞTEFAN CEL MARE”

SUCEAVA

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a V-a**

1. Fie .
2. Demonstrați că N+113 se scrie doar cu cifra 1;
3. Demonstrați că N nu este pătrat perfect.

*Adrian Vieriu, Suceava*

1. Determinați numerele știind că .

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

1. Să se arate că, oricare ar fi numărul , există numerele , astfel încât .

*Vasile Solcanu, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VI-a**

1. În acest an școlar, elevii unei clase au numit ***numere preferate*** numerele naturale de două cifre de forma  care satisfac egalitatea: Să se identifice ***numerele preferate*** ale clasei de elevi.

*Mariana-Liliana Popescu, Suceava*

2. Fie  cifre nenule care verifică relaţia . Arătaţi că  şi că cel puţin două dintre cifrele  sunt egale.

*Ion Bursuc, Suceava*

3. Se consideră un triunghi ABC cu  și Fie E și M mijloacele laturilor , respectiv  și F simetricul punctului A față de B. Arătați că:

* 1. 
  2. 

*Cristian Amorăriței, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VII-a**

1. Dacă a,b sunt numere reale nenule și , să se demontreze că este număr natural.

*Ion Radu, Bacău*

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: .

*Dan Popescu, Suceava*

**3.** Pe diagonala  a paralelogramului ABCD se iau punctele E şi F, astfel încât. Dacă , arătaţi că:

a) 

b) MNPQ este paralelogram;

c) Dacă aria triunghiului  este de  calculaţi aria triunghiului .

*Vasile Solcanu, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VIII-a**

1. Fie  numere raționale nenule,  Arătați că dacă  atunci Precizați cazul de egalitate.

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

2. Să se demonstreze că  Să se precizeze situația de egalitate.

*Mariana Liliana Popescu, Suceava*

3. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC în care  cu  Considerăm punctul , astfel încât  Demonstraţi că 

*Adrian Vieriu, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a IX-a**

1. a) Arătați că .

b) Pentru  notăm cu  numărul tripletelor de numere naturale  cu pro-prietatea că , iar  sunt în progresie geometrică cu rația număr natu-ral. Să se arate că .

*Mihai Piticari și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc*

2. Fie  o funcție de gradul doi cu proprietatea că vârful parabolei ce reprezintă graficul său are ambele coordonate întregi. Să se arate că dacă parabola mai conține măcar un punct cu ambele coordonate întregi, atunci conține o infinitate de astfel de puncte.

*Marius Marchitan,Suceava*

3. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*, precum și numărul real , știind că:



*Gheorghe Marchitan, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a X-a**

1. a) Arătați că există  , astfel ca mulțimea să fie infinită.

b) Să se arate că, pentru orice , mulțimea este vidă sau infinită.

*Dan Popescu, Suceava*

2. Să se arate că, pentru orice  și , are loc inegalitatea:

.

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

3. Fie dreptunghiul *MOGD* cu  și . Știind că *O* este centrul cercului circumscris unui triunghi *ABC*, *G* este centrul său de greutate, *M* este mijlocul laturii  și *D* este proiecția lui *G* pe *BC*, determinați lungimea laturii 

*Marius Marchitan, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a XI-a**

1. Fie , astfel încât . Să se arate că matricea *A* este singulară.

*Dan Popescu, Suceava*

2. Fie  cu proprietatea  cu . Arătaţi că funcţia *f* este continuă pe  şi determinaţi toate funcţiile cu această proprietate.

*Ion Bursuc, Suceava*

**3**.Fie  o funcţie derivabilă. Să se arate că, pentru orice , există , astfel încât .

*Marius Marchitan, Suceava*

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a XII-a**

1. Să se determine polinoamele  de grad , care satisfac condițiile:

1.  are toate rădăcinile întregi;
2. , cu  și .

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

2. Fie  o funcţie continuă şi impară, cu  Arătați că pentru orice numere reale  cu  și orice număr natural  are loc inegalitatea:

.

*Ion Bursuc și Daniela Macovei, Suceava*

3. Fie  şi funcţia convexă  cu . Să se demonstreze inegalitatea

.

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a V-a**

1. Fie .

1. Demonstrați că N+113 se scrie doar cu cifra 1;
2. Demonstrați că N nu este pătrat perfect.

*Adrian Vieriu, Suceava*

**Soluţie:**

a) Se scrie

1. Se deduce că ultima cifră a lui N este 8, deci N nu poate fi pătrat perfect.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Se scrie | 2p |
|  | 1p |
| b) Se deduce că ultima cifră a lui N este 8 | 3p |
| Concluzia | 1p |

2. Determinați numerele știind că

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

**Soluţie:**

Dacă x3, atunci . Rămâne că

Se analizează cele trei cazuri.

Se obține soluția x=2 și y=3

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Dacă x3, atunci . Rămâne că | 3p |
| Se analizează cele trei cazuri. | 3p |
| Finalizare | 1p |

3. Să se arate că oricare ar fi numărul , există numerele , astfel încât .

*Vasile Solcanu, Suceava*

**Soluţie:**

Dacă , , și divizibilitatea este evidentă.

Dacă , a2, considerăm numerele naturale distincte .

Conform principiului cutiei există printre acestea două numere care să dea același rest la împărțirea cu 2014.

Deci există pentru care .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Dacă , , și divizibilitatea este evidentă. | 2p |
| Dacă , a2, considerăm . | 2p |
| Finalizare folosind principiul cutiei | 3p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VI-a**

1. În acest an școlar, elevii unei clase au numit ***numere preferate*** numerele naturale de două cifre de forma  care satisfac egalitatea: Să se identifice ***numerele preferate*** ale clasei de elevi.

*Mariana-Liliana Popescu, Suceava*

**Soluţie:** Relația din enunț este echivalentă cu  de unde rezultă că  sau 

Cum *x, y* sunt cifre deducem că  sau 

Pentru  obținem  absurd.

Pentru  Deci singurul ***număr preferat*** este 72.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Deduce | 3p |
| sau | 2p |
| Determină ***numărul preferat*** | 2p |

2. Fie  cifre nenule care verifică relaţia . Arătaţi că  şi că cel puţin două dintre cifrele  sunt egale.

*Ion Bursuc, Suceava*

**Soluţie:** **

 .

Avem (1)  sau sausausau. Dacă , atunci relaţia (1) devine  este un număr natural de două cifre şi prin calcul se arată că acest lucru este posibil numai pentru . Pentru  obţinem , iar pentru  obţinem .

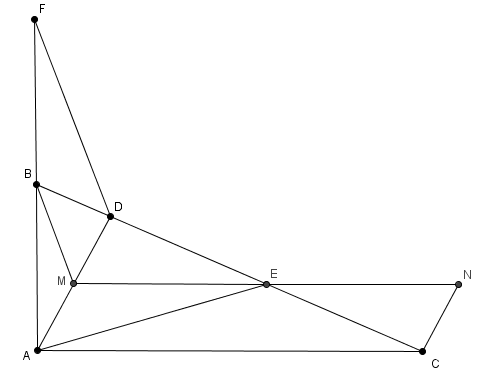
**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Arată că | 4p |
| Deduce că cel puţin două dintre cifrele  sunt egale | 3p |

3. Se consideră un triunghi ABC, cu  și Fie E și M mijloacele laturilor , respectiv  și F simetricul punctului A față de B. Arătați că:

* 1. 
  2. 

*Cristian Amorăriței, Suceava*

**Soluţie:**a) Fie N simetricul lui M față de E.

Considerând dreptele AD și NC cu secanta DC, , rezultă că AD||NC.

Avem AD||NC, MC secantă(1)

MD=MA, MD=NC(2)

Folosind relațiile (1) și (2) deducem că 

Fie dreptele MN, AC cu secanta MC și  (alt. int.), deci ME||AC.

b) Avem 

În triunghiul ABE, AD și EM sunt înălțimi concurente în M, deci M este ortocentrul triunghiului, deci  Analog punctele B şi M reprezintă mijloacele segmentelor [AF] şi [AD], deci BM||FD. Obținem 

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Demonstrează cerința | 3p |
| b) | 1p |
|  | 1p |
| Finalizare | 2p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VII-a**

1. Dacă a,b sunt numere reale nenule și , să se demontreze că este număr natural.

*Ion Radu, Bacău*

**Soluţie:**

Din ipoteză se obține b-a=ab. Înlocuind ab în expresia cerută se obține ==2

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Deduce ab=b-a | 3p |
| Obține rezultatul 2 | 4p |

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: .

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluţie:**

Pentru >1, contradicție cu .

x=-1 nu verifică.

x=0 este soluție a ecuaţiei date.

Pentru x determinăm a,b așa încât 2a+b=2x și x+1=, 13x+1=

Se obține

x=2 verifică ecuația.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1p |
| Elimină cazurile și x=-1 | 2p |
| Obține x=0 soluție | 1p |
| Obține x=2 soluție | 3p |

**3.** Pe diagonala a paralelogramului ABCD se iau punctele E şi F astfel încât. Dacă. Arătaţi că:

a) 

b) MNPQ este paralelogram;

c) Dacă aria triunghiului  este de calculaţi aria triunghiului.

*Vasile Solcanu, Bogdăneşti*

**Soluţie** M

A B

Q E

O N

F

P

D C

a) Fiemediană înşimediană în.

- paralelogram

b) centru de greutate în

Analog F – centru de greutate în.

Rezultă căsunt mediane sunt mijloacele laturilor paralelogramului ABCD.

linie mijlocie în şi.(1)

linie mijlocie în şi.(2)

Din 1 şi 2 rezultă că MNPQ este paralelogram.

c) E fiind centru de greutate în triunghiul ABC, rezultă

Deoarece mediana împarte un triunghi în două trunghiuri echivalente



**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Obține | 1p |
| paralelogram | 1p |
| b) sunt mijloacele laturilor paralelogramului ABCD | 2p |
| MNPQ este paralelogram | 1p |
| c) | 2p |

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a VIII-a**

1. Fie  numere raționale nenule,  Arătați că dacă  atunci Precizați cazul de egalitate.

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

**Soluţie:**Notăm  Rezultă că  relație adevărată doar pentru 

Se obține 

Avem 

Egalitatea are loc pentru q=1, adică 

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Deduce | 4p |
|  | 2p |
| Egalitatea are loc pentru q=1, adică | 1p |

2. Să se demonstreze că  Să se precizeze situația de egalitate.

*Mariana Liliana Popescu, Suceava*

**Soluţie:** Notăm  cu  Inegalitatea devine: 

Inegalitatea este adevărată deoarece  ceea ce este evident.

Egalitatea are loc pentru  sau 

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Demonstrează inegalitatea | 6p |
| Precizează cazul de egalitate | 1p |

3. Se consideră piramida triunghiulară regulată VABC în care  cu  Considerăm punctul  astfel încât  Demonstraţi că 

*Adrian Vieriu, Suceava*

**Soluţie: **

Fie M mijlocul lui , deci 

 Deducem că triunghiurile DAB şi MBV sunt asemenea, deci  Analog , de unde concluzia.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3p |
| Fie M mijlocul lui , deci | 1p |
|  | 1p |
|  | 1p |
| Finalizare | 1p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a IX-a**

1. a) Arătați că .

b) Pentru  notăm cu  numărul tripletelor de numere naturale  cu pro-prietatea că , iar  sunt în progresie geometrică cu rația număr natu-ral. Să se arate că .

*Mihai Piticari și Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc*

**Soluţie:** a) Se demonstrează prin inducție. Notăm . Evident  este adevărată. Pentru implicația  observăm că , deci . b) Dacă  este un triplet cu proprietatea din enunț, atunci  și , unde  și , adică . Cum , rezultă . Sumând după  obținem . Folosind inegalitatea  și cea de la punctul a) obținem .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Se demonstrează prin inducție | 2p |
| b) Scrie  și , unde | 1p |
| Găsește | 1p |
| Obține | 1p |
| Deduce | 1p |
| Finalizare | 1p |

2. Fie  o funcție de gradul doi cu proprietatea că vârful parabolei ce reprezintă graficul său are ambele coordonate întregi. Să se arate că dacă parabola mai conține măcar un punct cu ambele coordonate întregi, atunci conține o infinitate de astfel de puncte.

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluţie:** O funcție de gradul doi poate fi scrisă sub forma canonică , unde  și  reprezintă coordonatele vârfului *V* al parabolei. Notând  și , putem scrie funcția sub forma , unde . Fie  un punct cu coordonatele întregi, diferit de *V*, situat pe graficul lui *f*. Atunci , de unde . Considerăm șirul  definit prin . Se observă imediat că  este un șir strict crescător de numere întregi, iar . În concluzie, punctele  reprezintă o infinitate de puncte, cu ambele coordonate întregi, situate pe graficul funcției *f*.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Scrie *f* sub forma , unde | 2p |
| Găsește , unde , cu | 2p |
| Consideră șirul  definit prin | 1p |
| Obține | 1p |
| Finalizare | 1p |

3. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*, precum și numărul real , știind că:



*Gheorghe Marchitan, Suceava*

**Soluţie:** Ipoteza este echivalentă cu . Adunând cele două inegalități obținem:

,

care conduce imediat la inegalitatea



De aici găsim . Atunci  și . Deci .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Ipoteza echivalentă cu două inegalități | 1p |
| Obține | 2p |
| Găsește | 1p |
| Obține | 1p |
| Determină | 2p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 - CLASA a X-a

1. a) Arătați că există  astfel ca mulțimea să fie infinită.

b) Să se arate că pentru orice  mulțimea este vidă sau infinită.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluţie:** a) Spre exemplu,  este infinită.

b) Dacă  atunci  este infinită. Dacă , putem considera că , cu . Putem scrie , cu  și . Dacă  este irațional, atunci , deci . Într-adevăr, dacă ar exista  astfel ca , atunci ar rezulta , deci ar exista  astfel încât , adică , fals. Dacă , cu  și  prime între ele, atunci . Deducem că , deci este infinită.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Exemplu | 2p |
| b) Observă că dacă  atunci | 1p |
| Arată că dacă  este irațional, atunci | 2p |
| Arată că dacă  este rațional, atunci este infinită | 2p |

2. Să se arate că pentru orice  și  are loc inegalitatea:

.

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

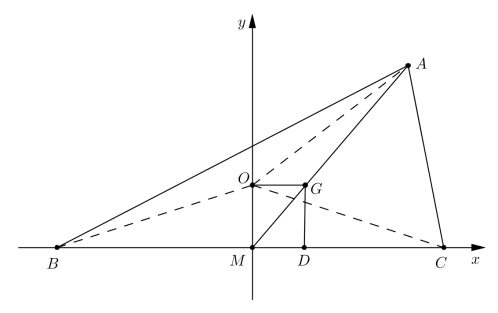
**Soluţie:** Inegalitatea dată este echivalentă cu inegalitatea . Observăm că pentru  avem , de unde . Atunci . În concluzie , cu egalitate pentru . Pentru  considerăm funcția , . Cum , *f* admite un maxim în  egal cu . Observăm că , pentru orice , cu egalitate dacă . Deducem că , cu egalitate pentru  și . În concluzie, , pentru orice  și . Egalitatea ar trebui să se realizeze în cazul în care  și . Ar rezulta , deci , fals. Rămâne inegalitatea strictă.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Inegalitatea dată este echivalentă cu | 1p |
| Deduce că | 1p |
| Obține  cu egalitate pentru | 1p |
| Arată că  cu cazul de egalitate | 2p |
| , pentru | 1p |
| Finalizare | 1p |

3. Fie dreptunghiul *MOGD* cu  și . Știind că *O* este centrul cercului circumscris unui triunghi *ABC*, *G* este centrul său de greutate, *M* este mijlocul laturii  și *D* este proiecția lui *G* pe *BC*, determinați lungimea laturii .

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluţie:** Considerăm un sistem de coordonate cu originea în *M* și axe *MD* și *MO*. Atunci . Cum  și *M* este mijlocul laturii  putem considera că , unde . Cum *G* se găsește în inte-riorul triunghiului *ABC* deducem că *A* are abscisă pozi-tivă. Deoarece  și ecuația lui *MG* este , rezultă , cu . Dar , de unde , ce duce la  și . Ținând cont că *O* este centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*, deducem că , adică , de unde . Atunci  deci .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Alege un sistem de coordonate în care scrie coordonatele punctelor | 1p |
| Fixează coordonatele punctelor *B* și *C* | 1p |
| Găsește ecuația lui *MG* | 2p |
| Găsește coordonatele lui *A* | 1p |
| Determină coordonatele punctelor *B* și *C* | 1p |
| Finalizare | 1p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a XI-a**

1. Fie  astfel încât . Să se arate că matricea *A* este singulară.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluţie:** Presupunem că matricea *A* este nesingulară. Rezultă  și *A* inversabilă. Ținând cont și de ipoteză deducem că , de unde găsim imediat că . Scriind teorema Cayley-Hamilton pentru matricea *A*,  și ținând cont că  și  obținem . Atunci  Trecem la urme şi obţinem , adică , fiind în contradicţie cu .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Presupune că matricea *A* este nesingulară | 1p |
| Deduce că | 1p |
| Găsește | 2p |
| Scrie teorema Cayley-Hamilton: | 1p |
| Obține | 1p |
| Finalizare | 1p |

2. Fie  cu proprietatea  cu . Arătaţi că funcţia *f* este continuă pe  şi determinaţi toate funcţiile cu această proprietate.

*Ion Bursuc, Suceava*

**Soluţie:** Observăm că .

Din (1) şi (2) deducem că . Fie funcția ,  ce va avea proprietatea . Pentru  avem , adică . Rezultă că funcţia *f* este crescătoare pe , deci şi funcţia *g* este crescătoare pe .

Din relaţia (3) rezultă prin inducţie matematică: , de unde , unde . Vom studia în cele ce urmează continuitatea funcției *g*. Pentru aceasta, fie  arbitrar. Cum funcția *g* este crescătoare, există limitele laterale ,  ce verifică inegalitățile . Atunci  și , deci . Rezultă că *g* este continuă în  și . Cum  a fost arbitrar, deducem că *g* este continuă pe  și , ceea ce implică continuitatea funcției *f* pe . În plus, *f* satisface relaţia din enunţ dacă şi numai dacă , cu .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Obține | 2p |
| Arată că *f* este crescătoare pe | 1p |
| Obține că  verifică  (ecuația lui Cauchy) | 1p |
| Arată că *g* este continuă pe  și , cu | 2p |
| Finalizare *f* este continuă pe  și , cu | 1p |

3. Fie  o funcţie derivabilă. Să se arate că pentru orice , există  astfel încât .

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluţie:** Presupunem că există  astfel încât . Trecând *x* în  obținem . Ținând cont că , rezultă , deci funcția *f* este strict crescătoare. Cum , obținem . Monotonia lui *f* implică . În continuare aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul : există  astfel încât . Folosind faptul că , deducem că , ceea ce contrazice faptul că .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Presupune că există  astfel încât | 1p |
| Obține că *f* este strict crescătoare | 1p |
| Găsește că | 2p |
| Aplică teorema lui Lagrange pe intervalul | 2p |
| Finalizare | 1p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**

##### - 24 mai 2014 -

**CLASA a XII-a**

1. Să se determine polinoamele  de grad , care satisfac condițiile:

1.  are toate rădăcinile întregi;
2. , cu  și .

*Gheorghe Marchitan, Suceava*

**Soluţie:** Observăm că , de unde rezultă că  (am ținut cont de (ii)). Cum  are toate rădăcinile întregi, putem scrie , cu . Deducem succesiv că  și . Cum , adică , iar , deducem că  și . Găsim  sau , polinoame ce verifică ipotezele.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Obține | 2p |
| Găsește | 1p |
| Scrie , cu | 1p |
| Deduce | 1p |
| Găsește  și | 1p |
| Finalizare  sau | 1p |

2. Fie  o funcţie continuă şi impară, cu  Arătați că pentru orice numere reale  cu  și orice număr natural  are loc inegalitatea:

.

*Ion Bursuc și Daniela Macovei, Suceava*

**Soluţie:** Inegalitatea este echivalentă cu . No-tând membrul stâng al inegalităţii cu *I* și ținând cont că  (*f* impară) deducem:

,

de unde găsim . Cum *f* continuă și , rezultă  iar din  obținem . În consecință, .

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Rescrie inegalitatea sub forma | 1p |
| Scrie | 1p |
| Motivează că | 1p |
| Obține | 2p |
| Motivează că | 1p |
| Finalizare | 1p |

3. Fie  şi funcţia convexă  cu . Să se demonstreze inegalitatea

.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluţie:** Fie  oarecare. Deoarece funcţia *f* este convexă pe , deci și pe , deducem că este continuă pe , ceea ce asigură şi integrabilitatea Riemann pe . Tot din convexitatea lui *f* rezultă că funcția  este crescătoare pe . Atunci  și , ceea ce conduce la faptul că  și . Prin integrare pe fiecare din intervalele  și  deducem că , respectiv . Adunând  în ambii membri ai inegalității  rezultă concluzia.

**Barem:**

|  |  |
| --- | --- |
| Motivează integrabilitatea Riemann a funcției *f* pe | 1p |
| Observă că funcția  este crescătoare pe | 1p |
| Obține  și | 1p |
| Găsește că  și | 2p |
| Obține | 1p |
| Finalizare | 1p |

**Notă:** Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.