OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 28 FEBRUARIE 2016

CLASA A IX –A

1.

a. Demonstrați că $x^2 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{9},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b. Dacă $a,b,c > 0$ și $a+b+c=1$, demonstrați că $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$\{x\}^2 + 22\{x\} = 10x - 9.$$

G.M. 12/2015

3. Pe laturile BC, CA și AB ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N și P. Fie A', B' și C' simetricele punctelor A, B respectiv C față de punctele M, N și P. Arătaţi că punctele $C \in (A'B'), A \in (B'C')$ și $B \in (A'C')$ dacă și numai dacă $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse şi selectate de către:
prof. Gherasin Gheorghe , Lic. „Regele Ferdinand”, Sighetu Marmației
prof. Giurgi Vasile, Colegiul Național „Dragoș Vodă”, Sighetu Marmației
prof. Bojor Florin, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.

BAREM DE CORECTARE
Clasa a XII-a M1

1. a. Inecuația este echivalentă cu $(3x-1)^2 \geq 0$ **2p**

b. Din **a.** rezultă că $a^2+1 \geq \frac{2}{3}a+\frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{9a}{6a+8}$ și analoagele.....................**2p**

Rămâne să demonstrăm că $\frac{9a}{6a+8}+\frac{9b}{6b+8}+\frac{9c}{6c+8} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{3a+4}+\frac{1}{3b+4}+\frac{1}{3c+4} \geq \frac{3}{5}$ care este adevărată din inegalitatea lui T. Andreescu:

$$\frac{1^2}{3a+4}+\frac{1^2}{3b+4}+\frac{1^2}{3c+4} \geq \frac{(1+1+1)^2}{3(a+b+c)+12}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$ **3p**

2. Ecuația se scrie $\{x\}^2+22\{x\}=10([x]+\{x\})-9 \Leftrightarrow \{x\}^2+12\{x\}=10[x]-9$ ...**1p**

Deoarece $\{x\} \in [0,1) \Rightarrow \{x\}^2+12\{x\} \in [0,13) \Rightarrow 10[x]-9 \in [0,13) \Rightarrow [x] \in \left[\frac{9}{10},\frac{22}{10}\right)$ adică $[x]=1$ sau $[x]=2$ **3p**

Pentru $[x]=1$ se obține $\{x\}^2+12\{x\}-1=0$ cu soluția admisibilă $\{x\}=-6+\sqrt{37}$ adică $x=-5+\sqrt{37}$ iar pentru $[x]=2$ se obține $\{x\}^2+12\{x\}-11=0$ cu soluția admisibilă $\{x\}=-6+\sqrt{47}$ adică $x=-5+\sqrt{47}$ **3p**

3. Notăm $\frac{BM}{MC}=k, \frac{CN}{NA}=p, \frac{AP}{PB}=q$.

Atunci $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1+k}=\overrightarrow{MA'}$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CM}=\frac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$ **1p**

Deci $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA'}=\frac{2\overrightarrow{AB}+(k-1)\overrightarrow{AC}}{k+1}$ **1p**

$\overrightarrow{NB'}=\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NB'}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1-p}{p+1}\overrightarrow{AC}$ **2p**

Dar $C \in (A'B') \Leftrightarrow \overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'}$ sunt coliniari

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{1+k}}{-1} = \frac{\frac{k-1}{k+1}}{\frac{1-p}{p+1}} \Leftrightarrow \frac{2}{p+1} = \frac{k-1}{p-1} \Leftrightarrow pk - 3p + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3p-1}{p+1}$$ **2p**

Analog $A \in (B'C'), B \in (C'A') \Leftrightarrow p = \frac{3q-1}{q+1}, q = \frac{3k-1}{k+1}$.

Substituind avem $p = \frac{2k-1}{k} \Rightarrow k = \frac{5k-3}{3k-1} \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow p = q = 1$..**1p**