INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală - 14.02.2015

Filiera tehnologică, profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XII-A

1) Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se consideră legea de compoziţie: $x\circ y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$.

a) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup comutativ.

b) Să se arate că funcţia $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ şi $(\mathbb{R},+)$.

2) **a)** Se consideră funcţiile $f,F:\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$, $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-2x}$.

Să se determine numerele reale a,b,c ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Să se determine funcţia $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, derivabilă pe $(0,\infty)$ care verifică relaţiile

i) $xf'(x)=\left(2x^2+1\right)f(x)$, $\forall x\in(0,\infty)$; **ii)** $f(1)=e^3$.

3) Definim pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Fie, de asemenea, $G=(3,\infty)$.

a) Demonstraţi că $\circ$ este asociativă şi comutativă;

b) Determinaţi $E\in\mathbb{R}$ astfel încât $E\circ x=x\circ E=E$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

c) Rezolvaţi în G ecuaţia $x\circ x\circ x=x$;

d) Studiaţi dacă $H=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $\circ$ (Justificare!).

4) **a)** Să se determine funcţia derivabilă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctul $B(1,1)$ şi pentru care tangenta la grafic în orice punct $M(b,G(b))$ are panta $g(b)=2b+1$, $\forall b\in\mathbb{R}$.

b) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\min\limits_{t\le x}\left(t^2-t+1\right), & x\le\dfrac{1}{2}\\ \max\limits_{t\ge x}\left(-t^2+t+1\right), & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

i) Demonstraţi că $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & \forall x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\\ -x^2+x+1, & \forall x\in\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)\end{cases}$;

ii) Studiaţi dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$ (folosind, eventual, rezultatul de la punctul i)).

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.