OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietăţile:

a) $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$;

Arătaţi că $\mathbb{N}^* \subset G$.

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Soluţie şi barem de corectare

$1 \in G \Leftrightarrow \sqrt{-2+3} \in G \Rightarrow -2+4 \in G$, adică $2 \in G$ .... (1p)

Pentru orice $x \in G$ avem: $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)+3} \in G \Rightarrow (x-1)+4 \in G \Leftrightarrow x+3 \in G$ .... (2p)

Atunci $1 \in G \Rightarrow 4 \in G \Rightarrow 7 \in G$, de unde $\sqrt{7+2} \in G$, adică $3 \in G$ .... (1p)

Folosind o variantă a principiului inducţiei matematice, rezultă $\mathbb{N}^* \subset G$ .... (3p)

Problema 2. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2 \text{ şi } x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{\left[\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}}\right]} - \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

Marius Perianu, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

$x_3 = 3$ .... (1p)

Vom demonstra prin inducţie matematică propoziţia $P(n): a_n = n$, pentru orice $n \geq 1$ .... (1p)

$P(1)$, $P(2)$ sunt adevărate .... (1p)

$\left[\sqrt{k^2+k+1}\right] = k$ .... (2p)

$x_{k+2} = k+2$, deci $P(k+2)$ este adevărată; ca urmare $a_n = n$, pentru orice $n \geq 1$ .... (2p)

Problema 3. Fie *ABCD* un patrulater înscris într-un cerc de centru *O*. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor *ABC*, *BCD*, *CDA*, respectiv *DAB* şi cu *M*, *N* mijloacele diagonalelor [*AC*], respectiv [*BD*].

a) Arătaţi că segmentele $[DH_1]$, $[AH_2]$, $[BH_3]$ şi $[CH_4]$ au acelaşi mijloc *P*.

b) Arătaţi că punctele *O*, *P* şi mijlocul segmentului [*MN*] sunt coliniare.

c) Arătaţi că dacă triunghiurile MH_1H_3 şi NH_2H_4 au acelaşi centru de greutate, atunci patrulaterul *ABCD* este dreptunghi.

[∗∗∗]

Soluţie şi barem de corectare

a) $\overrightarrow{H_1H_2} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD}$ .... (2p)

ADH_2H_1, ABH_2H_3 şi BCH_3H_4 sunt paralelograme, ceea ce justifică afirmaţia din enunţ .... (1p)

b) Fie Q mijlocul lui $[MN]$; avem $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)= =\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$, deci O, Q şi P sunt coliniare .... (2p)

c) MH_1H_3 şi NH_2H_4 au acelaşi centru de greutate dacă $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{OH_4}$ .... (1p)

De aici se obţine $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, de unde $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, adică $ABCD$ este paralelogram şi, fiind inscriptibil, paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi .... (1p)

Problema 4. Arătaţi că pentru orice numere reale $a,b,c>0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3-ab\sqrt{ab}}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-bc\sqrt{bc}}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-ca\sqrt{ca}}{c^2+ca+a^2}\geq 0.$$

Costel Anghel, Negreni, Olt

Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{ab\sqrt{ab}}{a^2+ab+b^2}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b^2+bc+c^2}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c^2+ca+a^2}\quad(*)$$

Avem $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}=0$ .... (2p)

deci $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$ .... (1p)

Atunci $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right)$ .... (2p)

Inegalitatea $(*)$ se obţine observând că $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\sqrt{a^3b^3}=ab\sqrt{ab}$ şi analoagele .... (2p)