OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Se consideră suma $S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (4p) Calculați media geometrică a numerelor S_3 și S_8.

b) (3p) Calculați partea întreagă a numărului $(S_n+1)\sqrt{n}$.

Gabriela-Cica Sascău, Rădăuți

Soluție: **a)** $S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + ... + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1}-1$

$S_3 = 1$ și $S_8 = 2$, deci media lor geometrică este $\sqrt{2}$.

b) $(S_n+1)\sqrt{n} = \sqrt{n(n+1)}$

Cum $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$, pentru orice număr natural nenul n, partea întreagă a numărului $(S_n+1)\sqrt{n}$ este n.

Barem

a) $S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + ... + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1}-1$	2 p
$S_3 = 1$ și $S_8 = 2$	1 p
Media lor geometrică este $\sqrt{2}$	1 p
b) $(S_n+1)\sqrt{n} = \sqrt{n(n+1)}$	1 p
$n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$	1 p
Partea întreagă este n	1 p

2. (7p) Determinați numerele naturale a și b, știind că există un unic număr natural n pentru care $a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b}$.

Gazeta Matematică Nr. 10/2023

Soluție:

$a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a^2(b+1)} < \sqrt{n} < \sqrt{b(a+1)^2}$. Ridicând relația la pătrat obținem:

$a^2(b+1) < n < b(a+1)^2$.

Cum numărul natural n este unic cu această proprietate și numerele $a^2(b+1)$ și $b(a+1)^2$ sunt numere naturale, obținem $b(a+1)^2 - a^2(b+1) = 2$, adică $b = \frac{a^2+2}{2a+1}$.

Cum b este număr natural, obținem că $(2a + 1)/(a^2 + 2)$.

Știind că $(2a+1)/(2a+1)^2$, obținem $(2a + 1)/(4a – 7)$ și cum $(2a+1)/(4a+2)$, avem $(2a + 1)/9$.

Se obține $a \in \{0,1,4\}$ deci $(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(4,2)\}$.

Barem

$a\sqrt{b+1} < \sqrt{n} < (a+1)\sqrt{b} \Leftrightarrow a^2(b+1) < n < b(a+1)^2$	1 p
$b(a + 1)^2 – a^2(b + 1) = 2$	2 p
$b = \dfrac{a^2+2}{2a+1}$	1 p
Din b număr natural obținem $(2a + 1)/9$	2 p
Finalizare $(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(4,2)\}$	1 p

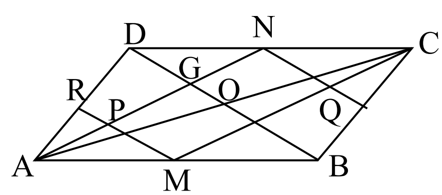
3. În paralelogramul ABCD, M și N sunt mijloacele laturilor AB și respectiv CD. Prin punctul M se construiește paralela la diagonala BD ce intersectează AN în P și AD în R, iar prin punctul N se construiește paralela la diagonala BD ce intersectează CM în Q.

a) (3p) Arătați că punctele C, G și R sunt coliniare, unde G este punctul de intersecție al dreptelor AN și BD.

b) (4p) Calculați raportul dintre aria triunghiului AMP și aria patrulaterului MPNQ.

Elena-Marcela Alexandru, Fălticeni

Soluție:



a) Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului ABCD. În triunghiul ACD, DO și AN sunt mediane și se intersectează în punctul G, deci G este centrul de greutate al triunghiului ACD.

Cum MR||BD și M este mijlocul segmentului AB, avem că R este mijlocul segmentului AD, deci CR este mediană în triunghiul ACD și conține punctul G.

b) $AP=1/3$ din $AN \Rightarrow A_{APM} = \frac{1}{2} A_{MNP} = \frac{1}{4} A_{MPNQ}$.

Se obține: $\dfrac{A_{AMP}}{A_{MPNQ}} = \dfrac{1}{4}$.

Barem

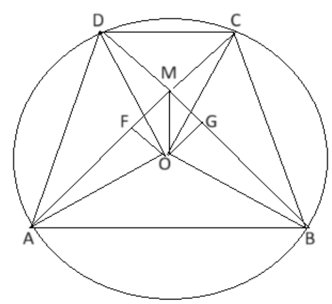
a) Demonstrează că G este centrul de greutate în triunghiul ACD	2 p
CR este mediană în triunghiul ACD$\Rightarrow$C, G, R sunt coliniare	1 p

b) Demonstrează că P este mijlocul segmentului AG	1 p
$AP=1/3$ din $AN \Rightarrow A_{APM} = \frac{1}{2} A_{MNP}$	1 p
Arată că MPNQ este paralelogram $\Rightarrow A_{MNP} = \frac{1}{2} A_{MPNQ}$	1 p
Finalizare: $\frac{A_{AMP}}{A_{MPNQ}} = \frac{1}{4}$	1 p

4. **(7p)** Într-un trapez isoscel ABCD, cu $AB \parallel CD$ și $AB > CD$, diagonalele sunt perpendiculare și concurente în punctul M. Știind că lungimea razei cercului circumscris trapezului este de 5cm, iar distanța de la centrul cercului la punctul M este de $3\sqrt{2}$ cm, calculați perimetrul trapezului.

Dorel Ispăşoiu, Gura Humorului

Soluție:



Construim, din centrul O al cercului circumscris trapezului, perpendicularele OF și OG, pe diagonalele trapezului. Cum AC = BD, vom avea d(O, AC) = d(O, BD), adică OF = OG. Se obține pătratul OFMG, cu diagonala $3\sqrt{2}$ cm deci OF = FM = 3cm și cum OA = OC = 5cm obținem AM = MB = 7cm și MC = MD = 1cm. Se obține perimetrul trapezului egal cu $18\sqrt{2}$ cm.

Barem

AC = BD $\Rightarrow$ d(O, AC) = d(O, BD), adică OF = OG	1 p
Arată că OFMG este pătrat cu latura 3cm	2 p
AM = MB = 7cm și MC = MD = 1cm	1 p
AB = $7\sqrt{2}$ cm, CD = $\sqrt{2}$ cm, AD = BC = $5\sqrt{2}$ cm	2 p
Finalizare: perimetrul trapezului este $18\sqrt{2}$ cm	1 p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**