OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine mulțimea de matrice : $M = \{X \in M_2(\mathbb{Z}) \mid AX = X^2 A\}$.

Prof.Burtea Marius, Alexandria

2. Aflaţi numerele reale a,b,c > 0 dacă $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+2014n+1}-bn+c\right)=\sqrt{\frac{2c}{a}}\cdot\sqrt{2014}$ şi $a + c = 72$.

Prof.Voiculeț Septimius, Videle

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

   Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}$$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

   a) Să se determine valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă.

   b) Să se arate că $A^{2014} \neq O_3, \forall\, a \in \mathbb{R}$.

.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a XI-a

1. Prin trecere la determinanți, din relația dată, se obține că $\det(X)=\det(X^2)$ de unde $\det(X)\in\{0,1\}$ 2p

Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $u=Tr(X)=a+d$.

Din relația Cayley-Hamilton se obține că $X^2-uX+\det(X)I_2=O_2$.

Deosebim cazurile:

1) $\det(X)=0$ deci $X^2=uX$.

Avem că $AX=uXA$ sau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și se obține că

$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$. Rezultă egalitățile $\begin{cases} c=bu \\ d=au \\ a=du \\ b=cu \end{cases}$. Adunând ecuațiile 2 și 3 se obține că $u=u^2$ cu soluțiile $u\in\{0,1\}$.

- Pentru $u=0$ se obține că $a=b=c=d=0$ și $X=O_2$.
- Pentru $u=1$ se obține că $a=d=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ 2p

2) $\det(X)=1$ deci $X^2=uX-I_2=\begin{pmatrix} ua-1 & ub \\ uc & ud-1 \end{pmatrix}$.

Avem că $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ua-1 & ub \\ uc & ud-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.Rezultă egalitățile $\begin{cases} c=bu \\ d=au-1 \\ a=du-1 \\ b=cu \end{cases}$.

Adunând ecuațiile 2 și 3 se obține că $u^2-u-2=0$ cu soluțiile $u\in\{-1,2\}$

- Pentru $u=2$ se obține că $b=c=0, a=d=1$ și $X=I_2$.
- Pentru $u=-1$ se obține că $c=-b, d=-a-1$ și $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a-1 \end{pmatrix}$. Din condiția $detX=1$ rezultă că $b^2=a^2+a+1$. Prin înmulțirea cu 4 rezultă că $4b^2-(2a+1)^2=3$ sau $(2b-2a-1)(2b+2a+1)=3$ cu soluțiile $(a,b)\in\{(0,1),(-1,1),(-1,-1),(0,-1)\}$. Se obțin matricele din $M_2(\mathbb{Z})$ $X\in\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$. 2p

Așadar $M=\left\{O_2, I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ 1p

2. Caz 1) a < b $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{a^2+\frac{2014}{n}+\frac{1}{n^2}}-b+\frac{c}{n}\right)=\infty(a-b)=-\infty$ nu convine...1p

Caz 2) a > b$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{a^2+\frac{2014}{n}+\frac{1}{n^2}}-b+\frac{c}{n}\right)=\infty(a-b)=\infty$ nu convine………...1p

Caz 3) a = b

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+2014n+1-a^2n^2+2acn-c^2}{\sqrt{a^2n^2+2014n+1}+an-c}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2014+2ac+\frac{1-c^2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{a^2+\frac{2014}{n}+\frac{1}{n^2}}+a-\frac{c}{n}\right)}=\frac{2014+2ac}{2a}$$

....2p

$\frac{2014+2ac}{2a}=\sqrt{\frac{2c}{a}}\cdot\sqrt{2014} \Leftrightarrow \frac{1007}{a}+c=2\sqrt{\frac{1007}{a}\cdot c} \Leftrightarrow \frac{1007}{a}=c$ 1p

$ac=1007$ și $a+c=72 \Leftrightarrow (a=53, c=19)$ sau $(a=19, c=53)$………… .1p

Rezultă două soluții $(a=53, b=53, c=19)$,$(a=19, b=19, c=53)$. … … . ..1p

3.Pentru $n=1$ se obține $a_1=1$.Pentru $n\geq 2$ rezultă

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{(2^x-1)+\cdots+(n^x-1)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)+\cdots+(n^x-1)}{nx}}=e^{\frac{\ln 2+\cdots+\ln n}{n}}=$$

$=e^{\ln\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{n!}$ deci $a_n=\sqrt[n]{n!}$ 4p

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt[n]{n!}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n\ln n}$. Aplicând lema Stolz-Cesaro va

rezulta $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n[\ln(n+1)-\ln n]+\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ln(n+1)}=1$ 3p

4. a) $detA=-a^2\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 2p

b) Dacă $A^{2014} = O_3$, ar rezulta $det(A^{2014}) = 0$, adică $(detA)^{2014} = 0$, deci $detA = 0$ ……………………………………………………………………2p

Atunci $-a^2 = 0$ deci $a = 0$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ……………………………2p

Calculând puterile lui A ar rezulta:

$A^2 = A, A^3 = A, \ldots, A^n = A, \forall\, n \in N^*$, deci $A^{2014} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$,

contradicție cu presupunerea făcută. …………………………………….1p