Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M$_1$

Problema 1

Arătați că valoarea integralei $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2009}+(1-x)^{2009}}{1+x^2}dx$ este un număr iraţional.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I=\int \frac{e^x+4x^2+10x+4}{e^x+8x^2+4x+4}dx$ si $J=\int \frac{4x^2-6x}{e^x+8x^2+4x+4}dx.$

Problema 3

Fie $a>0$ și $G=(-a,a)$.Pe G se definește legea de compoziție $x*y=\frac{a^2\cdot(x+y)}{a^2+xy}$.

a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Se definește funcția $f:G\to\mathbb{R}$, f(t)=F(t)-F(0), $(\forall)x\in\mathbb{R}$,unde F este primitiva a funcției $g:G\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{a^2-x^2}$,$(\forall)$ $x\in G$. Demonstrați că f este izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R},+)$.

Problema 4

Fie $H=\{A\in M_2(\mathbb{R})|A^t\cdot A=I_2\}$,unde A^t este transpusa matricei A. Demonstrați că :

a) $(\forall)A\in H\Rightarrow \det A\in\{-1,1\}$.

b) $(H,\cdot)$ este subgrup al grupului $(M,\cdot)$, unde $M=\{X\in M_2(\mathbb{R})|detA\neq 0\}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.