INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA

Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Olimpiada de matematică

Etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VIII-a

1) Fie numărul real a = $\left(\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^{-2} : \left(1+\sqrt{3{,}5}\right)^{-2}$.

Stabiliţi căreia din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aparţine numărul a.

2) a) Aflaţi numerele raţionale x şi y dacă $x\sqrt{2} + 2x - 2y\sqrt{2} + y = 10$.

b) Aflaţi numerele reale x şi y dacă $x^2 + 4y^2 + 10 = 6x - 4y$.

3) Fie O un punct pe latura AB a triunghiului echilateral ABC astfel încât AO = 2 BO şi MO perpendiculara în O pe planul (ABC).

Dacă OM = BC = 18 cm, calculaţi:

a) distanţa de la punctul M la dreapta AC;

b) distanţa de la punctul O la planul (MAC);

c) măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (MAC).

4) Se dă expresia E(x) = $\left(\frac{2}{x+3} + \frac{x}{3-x} - \frac{x-5}{x^2-9}\right) : \frac{2x^2+x-1}{9-x^2}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia E(x) are sens.

b) Aduceți expresia E(x) la forma cea mai simplă.

c) Aflați valorile raționale ale lui x pentru care E(x) este număr întreg.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str. Lacului Nr. 19,SloboziaIalomiţa
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Barem de corectare și notare

Olimpiada de matematică, etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VIII-a

Notă : Orice soluţie corectă, diferită de cea din barem, se notează cu punctajul corespunzător.

1) Fie numărul real a = $\left(\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)^{-2}$: $(1 + \sqrt{3,5}\ )^{-2}$.

Stabiliţi căreia din mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aparţine numărul a.

Soluție:

Amplificăm fracțiile din prima paranteză cu conjugatul numitorului . 1p

Apoi simplificăm și reducem termenii asemenea, avem $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ în prima paranteză 1p

Scriem 3,5 sub formă de fracție ordinară și aducem la același numitor, în a doua paranteză avem $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ 1p

Avem a = $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\right)^{-2} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2} = \frac{1}{2}$ 3p (câte 1p pentru fiecare pas)

Finalizare: a ∈ $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ 1p

Total: 7p

2) a) Aflaţi numerele raţionale x şi y dacă $x\sqrt{2} + 2x - 2y\sqrt{2} + y = 10$.

b) Aflaţi numerele reale x şi y dacă $x^2 + 4y^2 + 10 = 6x - 4y$.

Soluție:

a) Avem $(x - 2y)\sqrt{2} + (2x + y - 10) = 0$ (1) 1p

Pentru că x și y sunt numere raționale, rezultă că și numerele $x - 2y$ și $2x + y - 10$ sunt tot raționale (2) 1p

Din relațiile (1) și (2) obținem $x - 2y = 0$ și $2x + y - 10 = 0$ . . . 1p

Finalizare: $x = 4$ și $y = 2$. 1p

b) Relația din enunț se scrie $(x - 3)^2 + (2y + 1)^2 = 0$ . . . 1p

Pentru că o sumă de termeni pozitivi este egală cu zero, dacă toți termenii sumei sunt egali cu zero, avem $x - 3 = 0$ și $2y + 1 = 0$ 1p

Finalizare: $x = 3$ și $y = -0{,}5$ 1p

Total: 7p

3) Fie O un punct pe latura AB a triunghiului echilateral ABC astfel încât

AO = 2 BO şi MO perpendiculara în O pe planul (ABC).

Dacă OM = BC = 18 cm, calculaţi:

a) distanţa de la punctul M la dreapta AC;

b) distanţa de la punctul O la planul (MAC);

c) măsura unghiului diedru format de planele (ABC) şi (MAC).

Soluție:

a) Observăm că OA = 12 cm și OB = 6 cm 1p

Fie $OD \perp AC$, $D \in AC$, cum $OM \perp (ABC)$ rezultă cu teorema celor trei perpendiculare că $MD \perp AC$, deci $d(M, AC) = MD$ (1) 1p

Din ΔAOD avem $OD = 6\sqrt{3}$ cm și din ΔMOD avem $MD = 12\sqrt{3}$ cm (2), deci

$d(M, AC) = 12\sqrt{3}$ cm. 1p

b) Fie $OE \perp MD$, $E \in MD$ cu teorema a doua a înălțimii în ΔMOD

avem OE = 9 cm 1p

Avem OD⊥AC, AC⊂(MAC), MD⊥AC, MD⊂(MAC), OE⊥MD, E∈MD aplicând reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare obținem că OE⊥(MAC), deci d(O, (MAC)) = OE = 9 cm 1p

c) În ΔMOD avem m(∢MDO) = 60^0, pentru că avem cateta alăturată OD egală cu jumătate din ipotenuza MD. 1p

Avem (MAC)∩(ABC)= AC, OD⊥AC, OD⊂(ABC), MD⊥AC, MD⊂(MAC), deci

m[∢((MAC), (ABC))] = m(∢MDO) = 60^0 . . . . 1p

Total: 7p

4) Se dă expresia E(x) = $\left(\frac{2}{x+3} + \frac{x}{3-x} - \frac{x-5}{x^2-9}\right) : \frac{2x^2+x-1}{9-x^2}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia E(x) are sens.

b) Aduceți expresia E(x) la forma cea mai simplă.

c) Aflați valorile raționale ale lui x pentru care E(x) este număr întreg.

Soluție:

a) Expresia are sens dacă numitorii sunt diferiți de zero, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm 3, -1, \frac{1}{2}\right\}$ 1p

b) Observăm că $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x+1)$ . . 1p

Descompunem în factori numitorii, aducem la același numitor fracțiile din paranteză și obținem E(x) = $\left(\frac{-x^2 - 2x - 1}{(x+3)(x-3)}\right) : \frac{2x^2+x-1}{9-x^2}$ . . 1p

Descompunem în factori numitorii și numărătorii ambelor fracții, apoi înmulțim prima fracție cu inversul celei de-a doua și obținem E(x) = $\frac{x+1}{2x-1}$. . . 1p

c) Fie E(x) = $\frac{x+1}{2x-1} = k, k \in \mathbb{Z}$ (1) și $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm 3, -1, \frac{1}{2}\right\}$ (2) . . 1p

Exprimăm x în funcție de k și obținem $x = \frac{k+1}{2k-1}$ (3) . . . 1p

Finalizare: Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că $x \in \left\{\frac{k+1}{2k-1} \middle| k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\right\}$ 1p

Total: 7p