MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015
CLASA a IX - a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, prelucrare *Ovidiu Șontea*

a) Pe insula I trăiesc oameni cinstiți care spun totdeauna adevărul și mincinoși care totdeauna mint. Un explorator a întâlnit doi indigeni A și B.

Localnicul A a spus:

-Cel puțin unul dintre noi (A și B) este mincinos.

Se poate stabili cum este A și cum este B ? (mincinos sau cinstit). Justificare.

b) Arătați că $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2014}{2015!}<1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă A ar fi mincinos, atunci enunțul său nu ar fi adevărat, deci ambii sunt cinstiți. Contradicție.	2p
Deci A este cinstit.Enunțul său este adevărat, deci B este mincinos.	2p
b) $\sum_{k=1}^{2014}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{2014}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{2014}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$	2p
Finalizare.	1p

Subiect 2,G.M.6-7-8/2014

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x^2+2[x]\{x\}+3\{x\}^2=4.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$x=[x]+\{x\}$.	1p
Obținerea unei ecuații echivalente $([x]+2\{x\})^2=4$	2p
Observația $2\{x\}\in\mathbb{Z}$.	1p
$\{x\}\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.	1p
Finalizare si obținerea soluțiilor $x\in\left\{-2,2,\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right\}$.	2p

Subiect 3, autor ***

Se consideră numerele reale $a,b>0$, patrulaterul convex $ABCD$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC} = a$, respectiv $\frac{AQ}{QD} = \frac{BN}{NC} = b$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{BC}\right)$

b) Să se arate că dacă $MP \cap NQ = \{O\}$, atunci $\frac{MO}{OP} = b, \frac{QO}{ON} = a$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}, \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$. Prin înmulțirea celei de-a doua relații cu a și prin adunarea la prima se obține rezultatul.	3p
b) Fie punctul $R \in (QN)$ astfel încât $\frac{QR}{RN} = a$. Folosind a) $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{AQ} + a\overrightarrow{BN}\right), \overrightarrow{RP} = \frac{1}{1+a}\left(\overrightarrow{QD} + a\overrightarrow{NC}\right)$. Prin înmulțire cu b a celei de-a doua relații și prin scădere din prima se obține $\overrightarrow{MR} = b\overrightarrow{RP}$. Deci M,R,P coliniare, deci $R=O$.	3p
Finalizare	1p

Subiect 4, autor ***

Se consideră mulțimile :

$A = \{5p+7q \mid p,q \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5p+7q \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{35p+14q \mid p,q \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se determine $card(\mathbb{N} \setminus A)$.

b) Să se determine $\mathbb{Z} \setminus B$.

c) Să se determine mulțimea C.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Aplicăm varianta III a inducției matematice. Determinăm 5 numere naturale consecutive ce aparțin lui A, apoi aplicăm inducția de „pas 5". Prin încercări succesive determinăm : $25 = 5\cdot5+7\cdot0$, $26 = 5\cdot1+7\cdot3$, $27 = 5\cdot4+7\cdot1$, $28 = 5\cdot0+7\cdot4$, $29 = 5\cdot3+7\cdot2$. Presupunem că pentru $t \geq 25$ avem $t = 5p+7q \Rightarrow t+5 = 5(p+1)+7q$, deci $\forall t \geq 25 \Rightarrow t \in A$. Din încercările precedente deducem $card(\mathbb{N} \setminus A) = 13$.	3p
b) Cum $(5,7)=1$, rezultă că există $k,l \in \mathbb{Z}$ pentru care $1 = 5k+7l$. Prin înmulțire cu $t \in \mathbb{Z}$ se deduce $t = 5kt+7lt$, deci $\mathbb{Z} \subseteq B$. Cum $B \subseteq \mathbb{Z}$, rezultă $B = \mathbb{Z}$.	2p
c) Oricare $x \in C \Rightarrow 7 \mid x$, deci $7\mathbb{Z} \subseteq C$. Cum $(35,14)=7$, există $s,l \in \mathbb{Z}$ pentru care $7 = 35s+7l$. Fie $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7t = 35st+7lt$, deci $7\mathbb{Z} \subseteq C$. Deducem că $C = 7\mathbb{Z}$.	2p