Universitatea din Bucureşti **21.05.2023**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul MateInfoUB 2023
Soluţii

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ o progresie aritmetică de raţie r.

a) Demonstraţi că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ definit prin $b_n = 2a_n + 3$ pentru orice $n \geq 0$, este tot o progresie aritmetică.

b) Presupunem $r \neq 0$. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienţi reali astfel încât $(P(a_n))_{n\geq 0}$ este progresie aritmetică. Arătaţi că $\text{grad}(P) \leq 1$.

c) Unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 0}$ cu toţi termenii numere naturale îi asociem mulţimea $M = \{\cos(a_n) + i\sin(a_n) | n \in \mathbb{N}\}$. Determinaţi toate progresiile $(a_n)_{n\geq 0}$ pentru care $(M, \cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

d) Demonstraţi că, dacă toţi termenii progresiei $(a_n)_{n\geq 0}$ sunt numere naturale şi nu conţin în scrierea lor în baza 10 cifra 9, atunci $r = 0$.

Soluţie.

a) Avem $b_n = 2(a_0 + nr) + 3$ deci $(b_n)_{n\geq 0}$ este progresie aritmetică de prim termen $b_0 = 2a_0 + 3$ şi raţie $2r$ **3p**

b) Dacă $\text{grad}(P) = 0$ atunci nu avem nimic de demonstrat. Presupunem în continuare că $\text{grad}(P) \geq 1$ şi fie s raţia progresiei aritmetice $(P(a_n))_{n\geq 0}$. Atunci $P(a_n) = P(a_0) + ns$ şi cum $a_n = a_0 + nr$ implică $n = \frac{a_n - a_0}{r}$ (deoarece $r \neq 0$) obţinem că $P(a_n) = P(a_0) + s \cdot \frac{a_n - a_0}{r}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deducem că polinomul cu coeficienţi reali

$$F(X) = P(X) - s \cdot \frac{X - a_0}{r} - P(a_0)$$

are proprietatea că $F(a_n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $r \neq 0$, progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 0}$ are toţi termenii distincţi (o infinitate de termeni) şi, prin urmare, $F(X)$ are o infinitate de rădăcini, deci este identic nul. Obţinem astfel că $P(X) = s \cdot \frac{X - a_0}{r} + P(a_0)$, adică $\text{grad}(P) = 1$ **2p**

c) Dacă $(M, \cdot)$ este subgrup în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, avem $1 \in M$ deci există $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a_n = 2k\pi$; deducem $k = 0$ şi deci $a_0 = 0$. Pentru ca $(M, \cdot)$ să fie subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ este necesar şi suficient ca orice element din M, deci de forma $z := \cos(a_n) + i\sin(a_n)$ să admită un invers în M, deci de forma $z^{-1} = \cos(a_m) + i\sin(a_m)$. Aceasta revine la a spune că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să existe $m \in \mathbb{N}$ şi $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $nr + mr = 2k\pi$. Utilizând din nou faptul că $2k\pi \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă avem $k = 0$ deducem că $r = 0$, condiţie evident suficientă. Deci, $(M, \cdot)$ este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dacă şi numai dacă $a_n = 0$ pentru orice n **2p**

d) *Idee de demonstraţie: Dacă $r \neq 0$ construim un termen al progresiei care are prima cifră 9.*

Presupunem $r \neq 0$ şi fie $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $10^m \leq r < 10^{m+1}$, adică numărul de cifre ale lui r în baza 10 este $m+1$. Aleg $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $t > m$ şi $10^t > a_0$, deci $10^t \geq 10^{m+1} > r$. Deoarece

$$\frac{10^{t+1} - a_0}{r} - \frac{9 \cdot 10^t - a_0}{r} = \frac{10^t}{r} > 1,$$

atunci există cel puţin un număr natural nenul k astfel încât $\frac{9 \cdot 10^t - a_0}{r} \leq k < \frac{10^{t+1} - a_0}{r}$, de unde obţinem că $9 \cdot 10^t \leq a_k = a_0 + kr < 10^{t+1}$. Prin urmare, termenul a_k începe cu 9, o contradicţie cu presupunerea iniţială. Obţinem astfel că $r = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ..... **2p** $\square$

Problema 2. Fie $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{x}$ şi $g(x) = f(x) - x$. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ şirul de numere reale definit astfel: $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = \operatorname{arctg}(x_n) + \frac{1}{x_n}$, pentru orice $n \geq 0$.

a) Să se arate că g este strict descrescătoare şi că ecuaţia $f(x) = x$ are o soluţie unică $\overline{x} \in (0, +\infty)$.

b) Ştiind că $f(2) < 1,7 < f(1)$ arătaţi că $\overline{x} \in (1, 2)$.

c) Demonstraţi că pentru orice $1 < a < b$ avem $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}|a - b|$.

d) Demonstraţi că şirurile $(x_{2n})_{n \geq 0}$ şi $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sunt monotone şi arătaţi că $x_{2n} < \overline{x} < x_{2n+1}$ pentru orice $n \geq 0$. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

Soluţie.

a) Cum g este derivabilă observăm că

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} - 1 = -\left(\frac{1}{x^2(1+x^2)} + 1\right) < 0,$$

deci g este strict descrescătoare. În plus, avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Folosind şi faptul că g este continuă şi strict descrescătoare obţinem că există un unic număr real pozitiv $\overline{x}$ astfel încât $g(\overline{x}) = 0$, adică $f(\overline{x}) = \overline{x}$. **3p**

b) Observăm că $g(1) = f(1) - 1 > 1,7 - 1 > 0$ şi $g(2) = f(2) - 2 < 1,7 - 2 < 0$ şi cum g este continuă, folosind proprietatea lui Darboux, obţinem că $\overline{x} \in (1, 2)$. **2p**

c) Observăm că funcţia f îndeplineşte condiţiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[a, b]$, deci există $\ell \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\ell)$. Însă $f'(x) = -\frac{1}{x^2(1+x^2)}$, de unde

$$|f(b) - f(a)| = |b - a| \cdot |f'(\ell)| = |b - a| \cdot \frac{1}{\ell^2(1+\ell^2)} < \frac{1}{2}|b - a|,$$

unde ultima inegalitate rezultă din faptul că $\ell > 1$. **2p**

d) Demonstrăm prin inducţie că $(x_{2n})_{n \geq 0}$ e crescător, $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$ e descrescător şi $x_{2n} < \overline{x} < x_{2n+1}$ pentru orice n.

Folosind punctul b) obţinem că $x_0 = 1 < \overline{x}$. Din punctul c) (calculul derivatei lui f) rezultă că f este strict descrescătoare şi din $f(\overline{x}) = \overline{x}$ obţinem că $x_1 = f(x_0) = f(1) > f(\overline{x}) = \overline{x}$, adică $x_0 < \overline{x} < x_1$ (*).

În plus, observăm că

$$x_0 = 1 < \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to +\infty} f(x) < f(x_1) = x_2,$$

unde ultima inegalitate are loc deoarece f este strict descrescătoare. De aici rezultă şi că $x_0 < x_2$ implică $x_1 = f(x_0) > f(x_2) = x_3$, de unde împreună cu (*) avem pasul de verificare al inducţiei.

Pentru etapa de demonstrare presupunem afirmaţia adevărată pentru $k \leq n-1$ şi o demonstrăm pentru n. Din ipoteza de inducţie avem

$$x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < \overline{x} < x_{2n-1} < \ldots < x_3 < x_1$$

şi folosind că f este strict descrescătoare rezultă că

$$x_1 > x_3 > \ldots > x_{2n-1} > f(\overline{x}) = \overline{x} > x_{2n} > \ldots > x_4 > x_2,$$

Aplicând încă o dată f şirului de mai sus obţinem

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2n} < f(\overline{x}) = \overline{x} < x_{2n+1} < \ldots < x_5 < x_3$$

şi în particular rezultă $x_{2n-2} < x_{2n}$, $x_{2n+1} < x_{2n-1}$ şi $x_{2n} < \overline{x} < x_{2n+1}$, ceea ce încheie demonstraţia pasului de inducţie.

Avem deci că $(x_{2n})_{n\geq 0}$ şi $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt convergente, fiind monotone şi mărginite. Fie c şi d limitele celor două şiruri. E clar că $c \leq \overline{x} \leq d$. Trecem la limită în relaţia dată de c):

$$|x_{2n+1} - x_{2n}| = |f(x_{2n}) - f(x_{2n-1})| \leq \frac{1}{2}|x_{2n} - x_{2n-1}|$$

şi obţinem $d - c \leq \frac{1}{2}(d-c)$, de unde $d = c = \overline{x}$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ..... **2p** $\square$

Problema 3. Fie t un număr real pozitiv. Pe laturile AB, AC, BC ale triunghiului ABC considerăm punctele C_t, B_t respectiv A_t, astfel ca

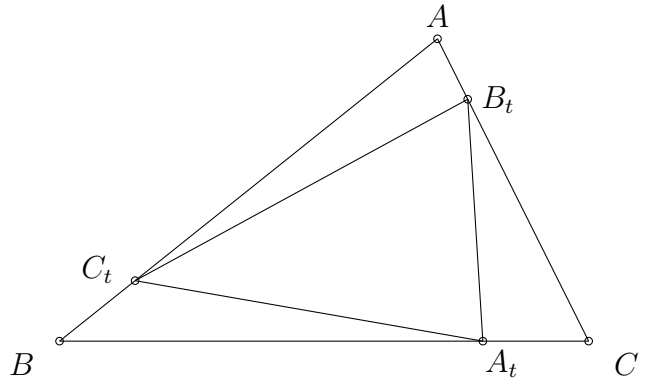
$$\frac{AC_t}{C_tB} = \frac{BA_t}{A_tC} = \frac{CB_t}{B_tA} = t$$

a) Demonstraţi că, pentru $t = 1$, triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

b) Demonstraţi că pentru orice t triunghiurile ABC şi $A_tB_tC_t$ au acelaşi centru de greutate.

c) Pentru $t = 3$, calculaţi raportul ariilor triunghiurilor ABC şi $A_3B_3C_3$.

d) Să presupunem $t = 2$. Desenăm figura, apoi ştergem triunghiul ABC, dar lăsăm triunghiul $A_2B_2C_2$. Indicaţi o modalitate de reconstruire a triunghiului ABC.



Soluţie.

a) Pentru $t = 1$ avem că A_1, B_1, C_1 sunt respectiv mijloacele laturilor BC, AC şi AB deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este triunghiul median. Acesta este evident asemenea cu ABC deoarece laturile lui $A_1B_1C_1$ sunt proporţionale cu laturile triunghiului ABC cu factor de proporţionalitate $\frac{1}{2}$. **3p**

b) *Soluţie sintetică.* Dacă $t = 1$ atunci concluzia iese imediat pentru că triunghiul $A_tB_tC_t$ devine triunghiul median $A_1B_1C_1$. Presupunem că $t \neq 1$ şi construim pe laturile BC, AC, AB punctele A'_t, B'_t, C'_t ca simetricele punctelor A_t, B_t şi C_t faţă de mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Notăm cu M mijlocul lui BC şi cu N mijlocul lui A_tC_t.

Se observă uşor, din reciproca teoremei lui Thales că $A_tB'_t||AB$, $A'_tC_t||AC$ şi $C'_tB_t||BC$. În plus, avem că $\Delta AB_tC'_t \equiv \Delta C_tBA'_t \equiv \Delta B'_tA_tC$ şi în particular avem $A'_tC_t \equiv AB_t$ şi $A'_tC_t||AB_t$. Din construcţia lui A'_t, avem că M este mijlocul segmentului A'_tA_t şi obţinem că MN este linie mijlocie în $\Delta A_tA'_tC_t$, deci $MN||A'_tC_t$ şi $MN = \frac{A'_tC_t}{2}$.

Prin urmare, $MN||AB_t$ şi $MN = \frac{AB_t}{2}$. În trapezul $ANMB_t$ notăm cu G punctul de intersecţie al diagonalelor AM şi B_tN. Din asemănarea ΔAGB_t şi ΔMGN obţinem că

$$\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB_t} = \frac{MN}{AB_t}\left(= \frac{1}{2}\right).$$

Dar AM este mediană în ΔABC şi rezultă că punctul G de mai sus care are proprietatea că $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$ este centrul de greutate al ΔABC. Similar, cum B_tN este mediană în $\Delta A_tB_tC_t$ şi $\frac{GN}{GB_t} = \frac{1}{2}$ obţinem că G este şi centrul de greutate al $\Delta A_tB_tC_t$, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluţie vectorială. Din ipoteză deducem imediat că $\overrightarrow{CA_t} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{BC_t} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{BA}$ respectiv $\overrightarrow{AB_t} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{AC}$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Avem

$$\overrightarrow{GA_t} + \overrightarrow{GB_t} + \overrightarrow{GC_t} = \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA_t}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB_t}\right) + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC_t}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \frac{1}{t+1}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Cum G este centrul de de greutate al triunghiului ABC avem $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ şi cum $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ deducem că

$$\overrightarrow{GA_t} + \overrightarrow{GB_t} + \overrightarrow{GC_t} = \overrightarrow{0}$$

deci G e centrul de greutate al triunghiului $A_tB_tC_t$ **2p**

c) Avem

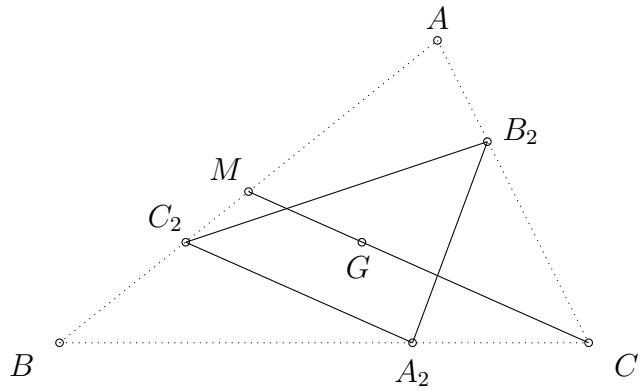
$$\mathcal{A}_{(AB_3C_3)} = AB_3 \cdot AC_3 \cdot \frac{\sin(\hat{A})}{2} = \frac{AC}{4} \cdot \frac{3AB}{4} \cdot \frac{\sin(\hat{A})}{2} = \frac{3}{16}\mathcal{A}_{(ABC)}.$$

Analog deducem că $\mathcal{A}_{(BC_3A_3)} = \mathcal{A}_{(CB_3A_3)} = \frac{3}{16}\mathcal{A}_{(ABC)}$ de unde $\mathcal{A}_{(A_3B_3C_3)} = \left(1 - \frac{9}{16}\right)\mathcal{A}_{(ABC)}$. Deci

$$\frac{\mathcal{A}_{(A_3B_3C_3)}}{\mathcal{A}_{(ABC)}} = \frac{7}{16}.$$

..... **2p**

d) *Soluţie sintetică.* Fie G centrul de greutate al triunghiului $A_2B_2C_2$. Ducem prin C_2 paralela la GB_2 şi analog, prin A_2 paralela la GC_2 respectiv prin B_2 paralela la GA_2. Punctele de intersecţie ale acestor drepte reprezintă vârfurile căutate A, B, C.

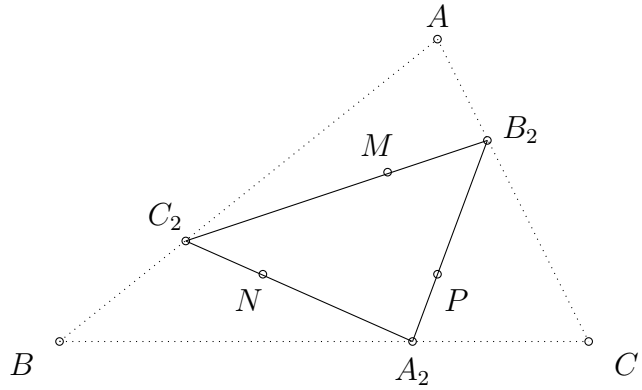


Pentru a arăta că această construcţie este corectă, e suficient să arătăm că GB_2 este paralelă cu AB (şi analog $GC_2||BC, GA_2||AC$). Fie M mijlocul lui AB; cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC, punctele C, G, M sunt coliniare. Din reciproca teoremei lui Thales în triunghiul CMA deducem $GB_2||AB$ şi similar pentru celelalte două paralelisme.

Soluţie vectorială. Considerăm punctele $M \in B_2C_2, N \in C_2A_2, P \in A_2B_2$ astfel încât

$$\frac{C_2M}{MB_2} = \frac{A_2N}{NC_2} = \frac{B_2P}{PA_2} = 2.$$

Ducem prin B_2 paralela la MP (respectiv prin C_2 paralela la MN şi prin A_2 paralela la NP). Punctele de intersecţie ale acestor drepte reprezintă vârfurile căutate A, B, C.



Pentru a arăta că această construcţie este corectă, este suficient să arătăm că $\overrightarrow{MP}$ este proporţional cu $\overrightarrow{AC}$ (respectiv $\overrightarrow{NM}$ cu $\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{PN}$ cu $\overrightarrow{CB}$).

Avem

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{B_2P} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_2B_2} + \frac{2}{3}\overrightarrow{B_2A_2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{C_2A} + \overrightarrow{AB_2}\right) + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{B_2C} + \overrightarrow{CA_2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{CB} + \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right)\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Similar se arată că $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ..... **2p** □