Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 9 Februarie 2013

Clasa a IX-a

Soluţii şi Barem de notare

Problema 1. Se observă că pentru $x=0$ condiţia este verificată................................1 p

Dacă $x\in(0,1)$, atunci $[x]=0$, $\{x\}=x$ şi elementele $0,x,x$,cu $x\neq 0$, nu pot forma o progresie geometrică..1 p

Fie $x\geq 1$. Atunci $\{x\}<[x]\leq x$, iar elementele mulţimii $\{x,\{x\},[x]\}$ formează o progresie geometrică dacă şi numai dacă avem $x\{x\}=[x]^2$ ....2 p

Relaţia $x\{x\}=[x]^2$ implică $x^2-x[x]-[x]^2=0$. Deducem $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]$ ....2 p

Însă cum $x<[x]+1$, se obţine $\frac{\sqrt{5}-1}{2}[x]<1$, adică $[x]<\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$ ....1 p

Rezultă $[x]=1$, deci $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ....1 p

Concluzie. $x\in\left\{0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$..1 p

Oficiu ....1 p

Total...**10 p**

Problema 2. a) Avem $(x_{n-1}-1)^2=x_n-x_{n-1}$, de unde rezultă $x_n=1-x_{n-1}+x_{n-1}^2$, oricare ar fi $n\geq 2$...1 p

Se demonstrează că propoziţia $P(n): x_n=1+x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}$ este adevărată oricare ar fi $n\geq 2$ prin inducţie matematică după n...1 p

Pentru $n=2$, avem $x_2=1-2+4=3$, deci $x_2=1+x_1$, prin urmare $P(2)$ este adevărată... 1 p

Presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru un $n\geq 2$, deci $x_n=1+x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}$.

Deducem $x_{n+1}=1-x_n+x_n^2=1+(x_n-1)x_n=1+(x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1})x_n$, adică propoziţia $P(n+1)$ este adevărată..2 p

b) Se observă că termenii şirului sunt nenuli. Atunci, prin împărţire cu $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n$ propoziţia de la a) este echivalentă cu propoziţia "$\frac{1}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}=\frac{1}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n}+\frac{1}{x_n}$ este adevărată oricare ar fi $n\geq 2$". ....1 p

Deducem succesiv $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}=\ldots$ $=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}=1$, oricare ar fi $n\geq 2$..2 p

Cum $\frac{1}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n}>0$, se obţine inegalitatea din enunţ ....1 p

Oficiu ....1 p

Total...**10 p**

Problema 3. a) Din $\overline{QA}+\overline{QB}=\overline{QD}$ deducem că $\overline{QD}$ este diagonală în paralelogramul $ADBQ$, de unde rezultă că $\overline{QB}=\overline{AD}$. ....2 p

Din $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{DB}$, folosind regula triunghiului de adunare a vectorilor liberi, deducem $\overline{MA}+\left(\overline{MA}+\overline{AB}\right)=\overline{DA}+\overline{AB}$, de unde $2\overline{MA}=\overline{DA}$, sau $2\overline{AM}=\overline{AD}$. Cum $\overline{AD}=\overline{BC}$, rezultă egalitatea $2\overline{AM}=\overline{BC}$. În particular, deducem că punctul M este mijlocul segmentului $[AD]$. ....2 p

b) Stabilirea configuraţiei geometrice, eventual figura ....1 p

Punctul P este intersecţia a două mediane ale triunghiului ADQ, deci este centrul de greutate al triunghiului ADQ..2 p

Concluzia: P centrul de greutate al triunghiului ADQ implică $\overline{PA}+\overline{PD}+\overline{PQ}=\overline{0}$. ....2 p

Oficiu ....1 p

Total...**10 p**

Problema 4. Fie AA', BB', cu $A'\in[BC]$, $\acute{B}'\in[AC]$, două dintre bisectoarele interne ale triunghiului ABC.

Aplicând teorema bisectoarei se obţine $\overline{BA'}=\frac{c}{b+c}\overline{BC}$, $\overline{AB'}=\frac{c}{a+c}\overline{AC}$ ....2 p

Se obţine apoi $\overline{AA'}=\frac{b}{b+c}\overline{AB}+\frac{c}{b+c}\overline{AC}$, $\overline{BB'}=-\overline{AB}+\frac{c}{a+c}\overline{AC}$ ....1 p

Cum $I\in(AA')$, există un număr real $x\in(0,1)$ astfel încât $\overline{AI}=x\overline{AA'}$......................1 p

Deducem $\overline{BI} = \left(\frac{xb}{b+c} - 1\right)\overline{AB} + \frac{xc}{b+c}\overline{AC}$ .... 1 p

Vectorii $\overline{BI}$ şi $\overline{BB'}$ fiind coliniari, rezultă $\frac{\frac{xb}{b+c}-1}{-1} = \frac{\frac{xc}{b+c}}{\frac{c}{a+c}}$, de unde se obţine $x = \frac{b+c}{a+b+c}$ .... 1 p

Prin urmare avem $\overline{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$.. 1 p

Deducem apoi $a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC} = (a+b+c)\overline{IA}+b\overline{AB}+c\overline{AC} = \left(-b\overline{AB} - c\overline{AC}\right)+b\overline{AB}+c\overline{AC} = \bar{0}$. Prin urmare centrul cercului înscris în triunghiul ABC verifică relaţia din enunţ................ 1 p

Reciproc, fie I' un punct care verifică relaţia dată. Deducem că $(a+b+c)\,\overline{II'} = \bar{0}$, şi cum $a+b+c \neq 0$, rezultă că $\overline{II'} = \bar{0}$, adică punctele I şi I' coincid. .... 1 p

Oficiu .... 1 p

Total.. **10 p**

Observaţie. Soluţia trebuie să includă o demonstraţie a expresiei vectorului de poziţie al centrului cercului înscris în triunghi.

Notă: Orice rezolvare corectă, completă sau parţială, va fi notată cu punctajul corespunzător.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a IX-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x pentru care elementele mulţimii $\{x, \{x\}, [x]\}$ formează o progresie geometrică.

Problema 2. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică $x_1 = 2$ şi $x_{n-1} = 1 + \sqrt{x_n - x_{n-1}}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

a) $x_n = 1 + x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} < 1$, oricare ar fi $n \geq 2$.

G.M.-B nr. 11/2009

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie Q, M puncte în planul său astfel încât $\overline{QA}+\overline{QB} = \overline{QD}$ şi $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{DB}$.

a) Arătaţi că $\overline{QB} = \overline{AD}$ şi $2\overline{AM} = \overline{BC}$.

b) Dacă P este punctul de intersecţie al dreptelor AB şi QM, demonstraţi că $\overline{PA} + \overline{PD} + \overline{PQ} = \bar{0}$.

G.M.-B nr. 11/2012

Problema 4. Fie a, b, c respectiv lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Să se arate că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC dacă şi numai dacă

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \bar{0}.$$

Notă:

- Timp de lucru: 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.