MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022

Problema 1.

Un număr natural $n \geqslant 2$ se numește *liber de pătrate* dacă nu se divide cu niciun pătrat perfect mai mare decât 1.

Determinați numerele naturale $n \geqslant 2$, libere de pătrate, cu proprietatea că numărul

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}$$

este natural, unde $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ este mulțimea divizorilor naturali ai numărului n.

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 30°$ și $\sphericalangle B = 80°$. Pe laturile AC și BC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC$ și $DE \parallel AB$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle EAC$.

Problema 3.

Aflați câte numere naturale $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ au proprietatea că, dacă pe un cerc se scriu 2022 numere reale astfel încât suma oricăror k numere aflate pe poziții consecutive este egală cu 2022, atunci toate cele 2022 de numere sunt egale.

Problema 4.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC $(AB < AC)$ și înălțimile AD, BE, CF, cu $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu H ortocentrul triunghiului ABC.

Fie X punctul în care cercul de diametru MH taie a doua oară dreapta AM și T punctul de intersecție a dreptelor HX și BC.

Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor TFD și AEF sunt tangente.

Problema 5.

Spunem că o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ cu cel puțin trei elemente este *liberă de progresii aritmetice* dacă pentru orice $a, b, c \in A$ distincte, avem $a + b \neq 2c$.

Arătați că mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 3^8 - 1\}$ conține o submulțime A cu cel puțin 256 elemente, liberă de progresii aritmetice.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022
Soluții și bareme

Problema 1. Un număr natural $n \geqslant 2$ se numește *liber de pătrate* dacă nu se divide cu niciun pătrat perfect mai mare decât 1.

Determinați numerele naturale $n \geqslant 2$, libere de pătrate, cu proprietatea că numărul

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}$$

este natural, unde $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ este mulțimea divizorilor naturali ai numărului n.

Soluție. Fie $n = p_1 p_2 \ldots p_j$ descompunerea în factori primi a numărului n. Dacă $S = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}$, atunci

$$S = \frac{1}{n}\left(1 + \sum p_1 + \sum p_1 p_2 + \ldots + \sum p_1 p_2 \ldots p_{j-1} + p_1 p_2 \ldots p_j\right)$$
$$= \frac{(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_j)}{p_1 p_2 \ldots p_j}.$$

.... **3p**

Cum $(p_j, 1+p_j) = 1$, înseamnă că p_j divide produsul $(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_{j-1})$. Fiind număr prim, p_j va divide unul dintre factorii acestui produs. **1p**

Presupunem că $p_1 < p_2 < \ldots < p_j$. Deducem că p_j divide $1+p_{j-1}$, așadar $p_j = 1+p_{j-1}$. prin urmare $j = 2$, $p_1 = 2$ și $p_2 = 3$. **2p**

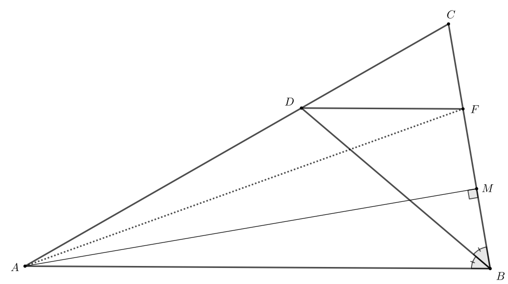
Singurul număr cu proprietatea din enunț este $n = 6$. **1p**

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022
Soluții și bareme

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 30^\circ$ și $\sphericalangle B = 80^\circ$. Pe laturile AC și BC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC$ și $DE \parallel AB$.

Determinați măsura unghiului $\sphericalangle EAC$.



Soluție. Fie $AM \perp BC$ și AF bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAC$, punctele M și F fiind situate pe latura BC. Evident că $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAF = 10^\circ$, deci AM este atât înălțime, cât și bisectoare în triunghiul ABF. Deducem că $BM = MF$. **1p**

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul ABC obținem că $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{BC}{AB}$. **1p**

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul AMC obținem că $\dfrac{CF}{MF} = \dfrac{AC}{AM}$. Rezultă că $\dfrac{CF}{FB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{CF}{MF} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AC}{AM}$. **1p**

Dar $\dfrac{1}{2}\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AC \cdot AB}{AM \cdot AB} = \dfrac{AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ}{AM \cdot AB} = \dfrac{2S_{ABC}}{AM \cdot AB} = \dfrac{AM \cdot BC}{AM \cdot AB} = \dfrac{BC}{AB}$. **3p**

Astfel, $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{CF}{FB}$, prin urmare dreptele DF și AB sunt paralele.

Înseamnă că punctele E și F coincid, deci $\sphericalangle EAC = 10^\circ$. **1p**

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022
Soluții și bareme

Problema 3.

Aflați câte numere naturale $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ au proprietatea că, dacă pe un cerc se scriu 2022 numere reale astfel încât suma oricăror k numere aflate pe poziții consecutive este egală cu 2022, atunci toate cele 2022 de numere sunt egale.

Soluție. Fie $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ un număr cu proprietatea că, date fiind numerele reale $x_1, x_2, \ldots x_{2022}$ scrise pe un cerc, suma oricăror k numere aflate pe poziții consecutive este egală cu 2022. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim $x_n = x_r$, unde $r \in \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$, astfel încât $n \equiv r \pmod{2022}$.

(A) Pentru orice $i \in \mathbb{N}$, avem

$$x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+k-1} = x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_{i+k} = 2022,$$

de unde rezultă că $x_i = x_{i+k}$. **2p**

(B) Dacă $(2022, k) = d \geqslant 2$, notând $x = \dfrac{2022 \cdot d}{k}$ și scriind pe cerc, în ordine, numerele

$$x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{de\ d-1\ ori}, x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{de\ d-1\ ori}, \ldots x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{de\ d-1\ ori},$$

observăm că suma oricăror k numere aflate pe poziții consecutive este egală cu 2022, fără ca numerele să fie egale.

Ca urmare, numerele k pentru care $(2022, k) \neq 1$ nu sunt soluții. **2p**

(C) Arătam că toate numerele $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ pentru care $(2022, k) = 1$ sunt soluții. Cum $(k, 2022) = 1$, există $u, v \in \mathbb{N}$, astfel încât $k \cdot u = 2022v + 1$. Atunci, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem:

$$x_m = x_{m+k\cdot u} = x_{m+2022v+1} = x_{m+1},$$

deci toate cele 2022 de numere sunt egale. **2p**

(D) În total sunt $\varphi(2022) = 672$ de soluții. **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

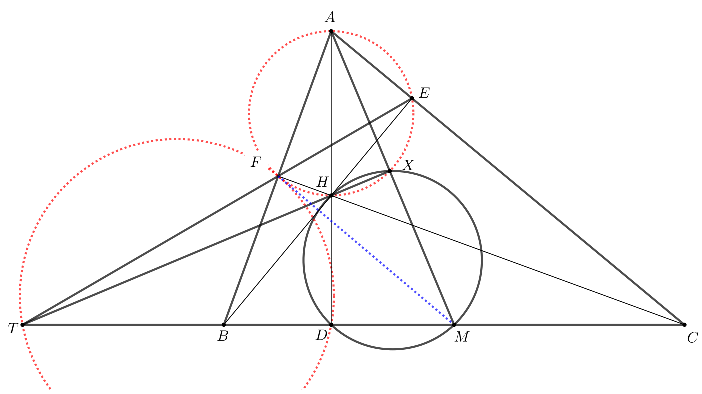
Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022
Soluții și bareme

Problema 4.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC $(AB < AC)$ și înălțimile AD, BE, CF, cu $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu H ortocentrul triunghiului ABC.

Fie X punctul în care cercul de diametru MH taie a doua oară dreapta AM și T punctul de intersecție a dreptelor HX și BC.

Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor TFD și AEF sunt tangente.



Soluție. Fie ω_1 cercul de diametru HM.

Atunci $\sphericalangle HXM = 90°$, deci $\sphericalangle AXH = 90° = \sphericalangle AFH = \sphericalangle AEH$. Rezultă că punctele E, F și X aparțin cercului ω_2 de diametru AH. **1p**

Cum $MC = MF$, avem $\sphericalangle MFC = \sphericalangle MCF = 90° - \sphericalangle B = \sphericalangle BAD$, prin urmare dreapta MF este tangentă cercului ω_2. .... **2p**

Fie ω_3 cercul de diametru BC. Axa radicală a cercurilor ω_1 și ω_2 este dreapta HX, axa radicală a cercurilor ω_1 și ω_3 este dreapta BC, iar axa radicală a cercurilor ω_2 și ω_3 este dreapta EF. Aceste trei axe radicale sunt fie drepte paralele, fie drepte concurente. Cum $HX \cap BC = \{T\}$, rezultă că $T \in EF$. **2p**

Atunci: $\sphericalangle FTD = 180° - \sphericalangle ABT - \sphericalangle BFT = 180° - \big(180° - \sphericalangle B\big) - \sphericalangle AFE = \sphericalangle B - \sphericalangle C = \sphericalangle MFB - \sphericalangle DFB = \sphericalangle MFD$.

Deducem că dreapta MF este tangentă cercului circumscris triunghiului TFD și, de aici, rezultă concluzia. **2p**

Primul baraj de selecție pentru OBMJ
Iași, 19 aprilie 2022
Soluții și bareme

Problema 5.

Spunem că o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ cu cel puțin trei elemente este *liberă de progresii aritmetice* dacă pentru orice $a, b, c \in A$ distincte, avem $a + b \neq 2c$.

Arătați că mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 3^8 - 1\}$ conține o submulțime A cu cel puțin 256 elemente, liberă de progresii aritmetice.

Soluție. Avem $6560 = 3^8 - 1$.

Orice număr din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 6560\}$ se scrie în baza 3 cu 8 cifre (0, 1 sau 2). Definim mulțimea A ca mulțimea numerelor care au doar cifrele 0 și 1, numărul lor fiind $2^8 = 256$ și arătăm că ea este liberă de progresii aritmetice. **2p**

Dacă prin absurd ar exista $a, b, c \in A$ astfel ca $a + b = 2c$, fie

$$a = \overline{a_7a_6a_5 \ldots a_1a_0}_{(3)}$$
$$b = \overline{b_7b_6b_5 \ldots b_1b_0}_{(3)}$$
$$c = \overline{c_7c_6c_5 \ldots c_1c_0}_{(3)}$$

cu $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, 7}$. Cifrele lui $a + b$ sunt, în ordine, $a_7 + b_7$, $a_6 + b_6, \ldots$. $a_1 + b_1$, $a_0 + b_0$, iar cele ale lui $2c$ sunt $2c_7$, $2c_6, \ldots$, $2c_1$, $2c_0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă:

$$a_i + b_i = 2c_i \text{ (par)}, \ i = \overline{0, 7}$$

și atunci $a_i = b_i = 1$, sau $a_i = b_i = 0$, adică $a = b$, contradicție. **5p**

Soluție alternativă. Demonstrăm prin inducție matematică după $n \geq 2$ că: mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 3^n - 1\}$ conține o submulțime cu 2^n elemente, liberă de progresii aritmetice.

Etapa de verificare. Pentru $n = 2$ submulțimea $A = \{1, 2, 4, 5\}$ cu 4 elemente a lui $\{0, 1, \ldots, 8\}$ este liberă de progresii aritmetice. **1p**

Etapa de demonstrație. Presupunem afirmația adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$.

Fie $X = \{a_1, \ldots, a_{2^n}\} \subset \{0, 1, \ldots, 3^n - 1\}$ o submulțime liberă de progresii aritmetice, cu $a_1 < \cdots < a_{2^n}$.

Demonstrăm că mulțimea $A = \{a_1, \ldots, a_{2^n}, a_1 + 2 \cdot 3^n, \ldots, a_{2^n} + 2 \cdot 3^n\}$ este o submulțime liberă de progresii aritmetice a mulțimii $\{0, 1, \ldots, 3^{n+1} - 1\}$, de cardinal 2^{n+1}.

Faptul că A este submulțime rezultă din $a_i + 2 \cdot 3^n < 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 1$ si are 2^{n+1} elemente deoarece pentru orice $i < j$ avem $a_i < a_j < a_i + 2 \cdot 3^n < a_j + 2 \cdot 3^n$. În plus, se observă că $A \cap \{3^n, \ldots, 2 \cdot 3^n - 1\} = \varnothing$ (*) și $A \setminus X$ este liberă de progresii aritmetice.

Faptul că A este liberă de progresii aritmetice rezultă din:

1) media aritmetică a lui a_i și a_j cu $i \neq j$ nu este în A, deoarece X este liberă de progresii aritmetice;

2) pentru orice i, j (pot fi și egale) avem

$$\frac{0 + 2 \cdot 3^n}{2} = 3^n \leq \frac{a_i + (a_j + 2 \cdot 3^n)}{2} \leq \frac{3^n - 1 + 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = 2 \cdot 3^n - 1,$$

deci, via (*), media aritmetică a numerelor a_i și $a_j + 2 \cdot 3^n$ nu aparține lui A;

3) pentru orice $i \neq j$ media aritmetică a numerelor $a_i + 2 \cdot 3^n$ și $a_j + 2 \cdot 3^n$ nu este în A observând că

$$\frac{2 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n}{2} = 2 \cdot 3^n \leq \frac{(a_i + 2 \cdot 3^n) + (a_j + 2 \cdot 3^n)}{2},$$

adică media aritmetică nu se află în X, iar cum $A \setminus X$ este liberă de progresii aritmetice obținem concluzia dorită. Inducția este completă și în particular, pentru $n = 8$ se obține soluția problemei. **6p**

(O1) Pentru soluția alternativă nu s-a acordat punctul de la etapa de verificare în absența unei strategii de rezolvare a pasului de inducție.

(O2) Pentru etapa de verificare făcută pentru $n = 1$ nu s-a acordat punctajul aferent deoarece, conform enunțului, o mulțime liberă de progresii aritmetice are cel puțin 3 elemente.

(O3) Alegerea mulțimii cu 2^{n+1} elemente de la pasul de inducție se poate face în diverse moduri.