Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a

1. a) Demonstraţi că $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

b) Determinaţi şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ având termenii strict pozitivi cu proprietatea $\dfrac{a_1+2a_2+...+na_n}{a_1+a_2+...+a_n}=\dfrac{2n+1}{3}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. a) Demonstraţi că $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$;

b) Să se arate că $x^2+y^2+z^2+t(xy+yz+zx)\geq 0$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $t\in[-1,2]$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012

3. Se consideră un triunghi ABC şi M un punct interior. Notăm cu G_A, G_B, respectiv G_C centrele de greutate ale triunghiurilor ΔMBC, ΔMAC şi, respectiv ΔMAB.

a) Demonstraţi că triunghiurile ΔABC şi $\Delta G_AG_BG_C$ sunt asemenea;

b) Demonstraţi că triunghiurile ΔABC şi $\Delta G_AG_BG_C$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ΔABC.

4. a) Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x-y|<\dfrac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $x=y$.

b) Considerăm $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termenii strict pozitivi şi raţia nenulă. Fie $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $[xa_n]=[ya_n]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $x=y$. (cu $[z]$ s-a notat partea întreagă a numărului real z)

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a - barem

1. a) Verificare prin inducţie matematică **3p**

b) Pentru $n=2$ obţinem $a_2=2a_1$, iar pentru $n=3$ obţinem $a_3=3a_1$ **1p**

Prin inducţie se demonstrează că $a_n=na_1$, deci şirurile căutate sunt de forma $a_n=na$ c $a>0$ **3p**

2. a) Verificare **3p**

b) Dacă $xy+yz+zx\geq 0$ atunci

$$x^2+y^2+z^2+t(xy+yz+zx)=\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)+(t+1)(xy+yz+zx)\geq 0,$$

oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $t\in[-1,2]$. **2p**

Dacă $xy+yz+zx<0$ atunci

$$x^2+y^2+z^2+t(xy+yz+zx)=\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right)+(t-2)(xy+yz+zx)\geq 0,$$

oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi oricare ar fi $t\in[-1,2]$. **2p**

3. a) Avem $\overrightarrow{G_AG_B}=\overrightarrow{MG_B}-\overrightarrow{MG_A}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3}=\dfrac{\overrightarrow{BA}}{3}$ şi analoagele. Se obţine concluzia. **4p**

b) Fie G şi G' centrele de greutate ale triunghiurilor ΔABC şi respectiv $\Delta G_AG_BG_C$. Atunci avem

$\overrightarrow{MG'}=\dfrac{\overrightarrow{MG_A}+\overrightarrow{MG_B}+\overrightarrow{MG_C}}{3}=\dfrac{2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)}{9}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{MG}$ şi apoi concluzia. **3p**

4. a) Presupunem prin reducere la absurd că $x\neq y$. Fie $a>0$, $a=|x-y|$. Axioma lui Arhimede asigură existenţa unui număr $m\in\mathbb{N}^*$ pentru care $ma>1$, adică $|x-y|>\dfrac{1}{m}$. **3p**

b) Ipoteza conduce la $|xa_n-ya_n|\in[0,1)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Echivalent cu $|x-y|<\dfrac{1}{a_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Concluzia se obţine asemănător cu punctul anterior. **4p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro