OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. a) Să se determine valoarea numărului x, dacă

$$\frac{2014}{2015 \cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1} = \frac{x}{2014 \cdot 2015}.$$

b) Folosind inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$, oricare ar fi a şi b pozitive şi diferite, să se arate că

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > \frac{13}{7}.$$

PROBLEMA 2. Se consideră numerele naturale $a = 3n + 7$, $b = 2n + 5$ şi $c = n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că numerele a şi b sunt prime între ele, iar numărul $[a, b] + [a, c]$ este pătrat perfect. ($[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y)

PROBLEMA 3. Se dau punctele coliniare A, O, şi B, cu $O \in (AB)$. De aceeaşi parte a dreptei AB se consideră punctele C şi D, astfel încât unghiurile $\widehat{AOC}$ şi $\widehat{COD}$ să fie adiacente. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$ şi $[ON$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$. Se ştie că $\mathrm{m}\left(\widehat{MOD}\right) = 105°$ şi $\mathrm{m}\left(\widehat{NOC}\right) = 120°$.

a) Arătaţi ca unghiul $\widehat{COD}$ este drept.

b) Dacă în interiorul unghiului $\widehat{COD}$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea O, astfel încât cele 13 unghiuri formate, cu interioarele disjuncte două câte două, au măsurile exprimate prin numere naturale nenule, demonstraţi că printre acestea există cel puţin două unghiuri congruente.

PROBLEMA 4. a) Considerăm punctele coliniare $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2015}$ (în această ordine), astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, ..., $A_{2014}A_{2015} = 2015$ cm. Să se calculeze distanţa dintre punctele A_{1000} şi A_{2015}.

b) Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte, astfel încât oricare trei dintre punctele date sunt necoliniare. Colorăm fiecare dintre segmentele determinate de ele, fie cu portocaliu, fie cu violet, la întâmplare. Demonstraţi că există un triunghi cu vârfurile în trei dintre cele şase puncte, care are toate laturile de aceeaşi culoare.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1.

$(2p)$ a) $2015 \cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1 = 2014 \cdot 2014$

$(2p)$ Soluţia este $x = 2015$

$(1p)$ b) Avem $1 + \frac{1}{500} > \frac{4}{501}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{499} > \frac{4}{501}$, ..., $\frac{1}{250} + \frac{1}{251} > \frac{4}{501}$

$(1p)$ de unde, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > 250 \cdot \frac{4}{501} = \frac{1000}{501}$

$(1p)$ Deoarece $\frac{1000}{501} > \frac{13}{7}$, obţinem inegalitatea cerută.

PROBLEMA 2.

$(3p)$ Se arată că $(3n + 7, 2n + 5) = 1$

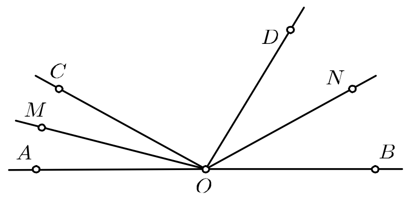
$(1p)$ şi $(3n + 7, n + 2) = 1$

$(1p)$ Utilizarea formulei $x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$

$(1p)$ Astfel, $[a, b] = a \cdot b$ şi $[a, c] = a \cdot c$

$(1p)$ de unde, $[a, b] + [a, c] = a \cdot b + a \cdot c = (3n + 7)^2$

PROBLEMA 3.



(1p) a) Avem $m\left(\widehat{MOC}\right)+m\left(\widehat{COD}\right)=105^\circ$, $m\left(\widehat{COD}\right)+m\left(\widehat{DON}\right)=120^\circ$

(1p) şi $m\left(\widehat{AOC}\right)+m\left(\widehat{COD}\right)+m\left(\widehat{DOB}\right)=180^\circ$

(2p) Dacă notăm: $m\left(\widehat{AOM}\right)=m\left(\widehat{MOC}\right)=a$, $m\left(\widehat{BON}\right)=m\left(\widehat{DON}\right)=c$ şi $m\left(\widehat{COD}\right)=b$ avem: $a+b=105^\circ$, $b+c=120^\circ$ şi $2a+b+2c=180^\circ \Rightarrow a=15^\circ,\ b=90^\circ$ şi $c=30^\circ$

(1p) b) Suma măsurilor celor 13 unghiuri cu interioarele disjuncte este egală cu 90°

(1p) Presupunem că cele 13 măsuri sunt numere naturale nenule diferite. Astfel, cea mai mică valoare a sumei măsurilor celor 13 unghiuri ar fi $1^\circ+2^\circ+3^\circ+\cdots+13^\circ=\dfrac{13\cdot 14^\circ}{2}=91^\circ$

(1p) Contradicţie cu ipoteza. Deci, cel puţin două unghiuri au măsurile egale.

PROBLEMA 4.

(1p) a) $A_{1000}A_{2015}=A_{1000}A_{1001}+A_{1001}A_{1002}+...+A_{2014}A_{2015}$

(1p) $A_{1000}A_{2015}=1001\text{ cm}+1002\text{ cm}+...+2015\text{ cm}$

(2p) $A_{1000}A_{2015}=1530\,620\text{ cm}$

(1p) b) Considerăm cele 5 segmente cu un capăt în punctul A. Conform principiului cutiei, există printre acestea măcar trei de aceeaşi culoare.

(1p) Presupunem, de exemplu, că segmentele AB, AC şi AD sunt toate trei de aceeaşi culoare, şi anume, violet.

Dacă o latură a triunghiului BCD este violet, ea completează cu două dintre segmentele anterioare un triunghi violet.

(1p) În caz contrar, triunghiul BCD este portocaliu şi demonstraţia este completă.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.