CLASA A XI-A

1. Cu notațiile obişnuite într-un triunghi ABC, arătați că:
$$\begin{vmatrix} -a & a-2c\cos B & a \\ b & -b & b-2a\cos C \\ c-2b\cos A & c & -c \end{vmatrix} = 0.$$

Benedict G. Niculescu, Bucureşti

Supliment Gazeta Matematică, nr.11/2012

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Arătați că pentru orice n natural nenul există $x_n, y_n \in Z$ astfel încât $A^n = x_n A + y_n I_2$.

   b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

***

3. Se consideră şirurile $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, unde $n \in N^*$.

   a) Arătați că $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi $(f_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător.

   b) Ştiind că cele două şiruri au limita e, arătați că $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.

   c) Studiați convergența şirului $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

***

4. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{an^3 + n^2 + 2n + 1} - \sqrt{4n^2 - n + 2}$ .Discuție după parametul real a .

***

NOT�: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este notat cu 7p.

BAREME

CLASA A XI-A

SUBIECTUL 1

Soluție: Din teorema cosinusului avem $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, deci

$c-2b\cos A = c-\frac{b^2+c^2-a^2}{c} = \frac{a^2-b^2}{c}$. (2p)

Analog celelalte expresii şi determinantul devine $\Delta = \begin{vmatrix} -a & \frac{b^2-c^2}{a} & a \\ b & -b & \frac{c^2-a^2}{b} \\ \frac{a^2-b^2}{c} & c & -c \end{vmatrix}$ (2p)

Se calculează determinantul şi se obține $\Delta = 0$. (3p)

SUBIECTUL 2 Soluție: a) Demonstrăm prin inducție după n propoziția $\forall n \in N^*, p(n): \exists x_n, y_n \in Z..a.i..A^n = x_n A + y_n I_2$.

Avem $p(1): \exists x_1, y_1 \in Z..a.i..A = x_1 A + y_1 I_2$ adevarata pentru $x_1 = 1, y_1 = 0$ (1p)

Din relația Cayley-Hamilton avem $A^2 = 4A + 5I_2$. (1p)

Presupunem $p(k)$ adevărată şi demonstrăm $p(k+1)$. Pentru aceasta calculăm $A^{k+1} = A^k \cdot A = (x_k A + y_k I_2)A = x_k A^2 + y_k A = x_k(4A+5I_2) + y_k A = (4x_k + y_k)A + 5x_k I_2$.
Deci există $x_{k+1} = 4x_k + y_k$, $y_{k+1} = 5x_k$, ambele din Z, astfel încât p(k+1) adevărată. (2p)

b) Înlocuind pe $y_k = 5x_{k-1}$ în prima recurență obținem $x_{k+1} = 4x_k + 5x_{k-1}$. Folosind ecuația ataşată deducem $x_n = \frac{5^n-(-1)^n}{6}$, $y_n = \frac{5^n+5(-1)^n}{6}$. Se deduce $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$. (3p)

SUBIECTUL 3 Soluție: a) Calculăm
$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1+\frac{-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \overset{Bernoulli}{\geq} \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1} > 1$,
deci şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. (2p)

Analog se demonstrează că şirul $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ este strict descrescător (1p)

b) Avem $e_n < e < f_n$ şi aplicând funcția $\ln$ acestei inegalități se obține concluzia. (2p)

c) Se calculează $c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) < 0$ deci şirul este strict descrescător. Însumând inegalitățile de la punctul b) se deduce mărginirea, deci şi convergența. (2p)

SUBIECTUL 4.

Soluție: Scoțând pe n factor comun forțat se obține

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{a+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} - \sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right) = \infty\cdot(\sqrt[3]{a}-2) = \begin{cases} \infty,..daca..a > 8 \\ -\infty,..daca..a < 8 \\ \infty\cdot 0,..daca..a = 8 \end{cases}$$ (4p)

Pentru a=8 avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+n^2+2n+1}-2n\right)+\left(2n-\sqrt{4n^2-n+2}\right)=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}$, după ce amplificăm fiecare diferență cu conjugate. (3p)

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.