MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a 10-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1. a) Demonstraţi că dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$ şi $b\neq 1$, atunci $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2^{\log_5 x}-1}+\sqrt{5-x^{\log_5 4}}=2$.

Prof.Camelia Macsut, Supliment Gazeta Matematică 3/2015

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Relaţia rezultă prin logaritmare	**2p**
b) Dacă $2^{\log_5 x}=y$, atunci $x^{\log_5 4}=y^2$	**1p**
Notând $\sqrt{y-1}=t$, după eliminarea celuilalt radical ecuaţia devine $t^4+3t^2-4t=0$	**1p**
$t_1=0$ duce la $x_1=1$	**1p**
Ecuaţia $t^3+3t=4$ are soluţia unică $t_2=1$, care duce la $x_2=5$	**2p**

Subiect 2. a) Demonstraţi că, dacă α,β sunt numere reale, $0<a<b<1$ şi $a^{\alpha}=b^{\beta}$, atunci $\alpha<\beta$.

b) Demonstraţi că, dacă $a,b,c\in(0,1)$ şi $a^{\frac{1}{1+a^b}}=b^{\frac{1}{1+b^c}}=c^{\frac{1}{1+c^a}}$, atunci $a=b=c$.

Prof. Mihail Bălună, Prof. Eugen Radu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $0<a<b<1$ şi $\alpha\geq\beta$, atunci $a^{\alpha}\leq a^{\beta}<b^{\beta}$ - fals	**2p**
b) Este suficient să analizăm cazul $a=\max\{a,b,c\}$	**1p**
Atunci $1/(1+a^b)\geq 1/(1+c^a)$, deci $a^b\leq c^a$, de unde $b\geq a$, ceea ce duce la $b=a$	**3p**
Acum, prima egalitate implică $a^a=a^c$, deci $a=c$	**1p**

Subiect 3. Fie a,b,c numere complexe distincte şi cu acelaşi modul. Demonstraţi că, dacă $|a+2b|=|b+2c|=|c+2a|$, atunci a,b,c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\|a+2b\|^2=(a+2b)(\bar{a}+2\bar{b})=r^2+2(a\bar{b}+\bar{a}b)+4r^2=5r^2+2r^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$	**2p**

Ipoteza duce la $a/b+b/a=b/c+c/b$, de unde $(a-c)(b^2-ac)=0$, deci $b^2=ac$	**2p**
Rezultă $b^3=abc$ şi, analog, $a^3=abc, c^3=abc$	**1p**
Astfel a,b,c sunt rădăcinile de ordinul trei ale numărului abc, de unde concluzia	**2p**

Subiect 4. Se consideră o mulţime nevidă A de numere reale şi o funcţie $f:A\to A$ cu proprietatea

$$f(f(x))+2f(x)=3x.$$

a) Demonstraţi că funcţia f este injectivă.

b) Demonstraţi că dacă A este finită, atunci f este funcţia identică.

c) Rămâne valabilă concluzia de la punctul b) dacă mulţimea A este infinită ?

Prof. Eugen Radu

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $f(x)=f(y)$, atunci $f(f(x))=f(f(y))$, deci $x=y$	**2p**
b) Fie $a=\min A$	**1p**
Atunci $f(a)\geq a, f(f(a))\geq a$ şi $f(f(a))+2f(a)=3a$, deci $f(a)=a$	**1p**
Cum f este injectivă putem restricţiona f la $A_1=A\setminus\{a\}$ şi continuăm inductiv	**1p**
c) Nu; pentru $A=\mathbb{R}$ putem lua, de exemplu, funcţia dată de $f(x)=-3x$	**2p**