OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA ZONALĂ – 9 FEBRUARIE 2013

CLASA A XI-A

SUBIECTUL 1

Fie matricile astfel încât și . Calculați *x* și *y*.

Gazeta matematică, supliment cu exerciții

SUBIECTUL 2

Se consideră matricea .

a). Să se determine matricile din care comută cu .

b). Să se rezolve în ecuația .

Culegere de probleme

SUBIECTUL 3

Să se studieze convergența șirului definit prin , , .

Culegere de probleme

SUBIECTUL 4

Fie , două șiruri de numere raționale asfel încât Să se arate că:

a). și

b). .

Culegere de probleme

Propunător, prof. Sfetcu Traian, Liceul teoretic *Ioan Slavici* Panciu

MINISTERUL EDUCATIEI, CERCETARII, TINERETULUI SI SPORTULUI

INSPECTORATUL SCOLAR AL JUDETULUI VRANCEA

CentrulMetodic -Panciu

a. **SOLUȚII / BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE**

Subiect	SOLUȚII	BAREM DE CORECTARE
1	det = 80, = *xy*-120 det, deci avem . Pe de altă parte avem i relaiile , deci . Din cele două relaii avem soluiile (10,20) sau (20,10)	1p 1p 2p 1p 2p
2	a). Notăm . Din egalitatea *AB*=*BA*, vom deduce , cu *a*,*b* reale. b). Relaia o vom înmuli la stânga i la dreapta cu *X* i vom avea , de unde deducem că *X* comută cu *A*, asta înseamnă că . Din ipoteză , de unde avem , adică det*X*=1, deci a^2=1, de unde *a*=1 sau *a*=-1. Dacă *a*=1 avem . Dacă *a* = -1 nu avem soluie	1p 1p 1p 2p 2p
3	Vom demonstra prin inducie că irul este crescător. Observăm că . Presupunem că i vom arăta că . Într-adevăr , adică irul este crescător. Pentru mărginire este evident că . Presupunem că i vom demonstra că . Într-adevăr . Deci < 3. Fiind monoton i mărginit irul este convergent. Pentru aflarea limitei se folosete relaia de recurenă.	 2p 1p 1p 2p 1p
4	 , de unde inând seama de faptul că irurile au termeni raionali rezultă egalităile cerute. b). Din ipoteză rezultă că , apoi folosind i relaia iniială se determină forma irurilor i . În final inând seama că deducem rezultatul.	2p 3p 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI I CERCETĂRII
COLEGIUL NAIONAL "AL. I. CUZA"

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -februarie 2013

Clasa a XI-a

1. Sa se calculeze limitele:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}...\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$

2. Fie $f:R\to R$ o functie periodica .Aratati ca nu exista $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

3. Fie $A\in M_2(R), A=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha & 2\sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha-\sin\alpha\end{pmatrix}$.Sa se calculeze $A^n, n\in N$.

4. Se consideră şirul $(a_p)_{p\geq 2}$ definit astfel:

   $a_p=\left[\dfrac{2^{n+1}+3}{2^n+1}\right]+\left[\dfrac{3^{n+1}+4}{3^n+1}\right]+...+\left[\dfrac{p^{n+1}+p+1}{p^n+1}\right]$, unde $n\in N^*$, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

   Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\ln b_n-3n^2\ln(n+1)\right)$, unde $b_n=6\left(\sum\limits_{p=2}^{n}a_p-1\right)$,

$(\forall)\quad n\in N, n\geq 2$

Clasa a-XI-a Solutii

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ (2p)

b) Notam $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\dots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}\Rightarrow$ (1p)

$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\dots\cdot\sqrt[n-1]{\cos nx}(1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\dots=\frac{n}{2}(2p)\Rightarrow$$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{n}{2}\Rightarrow\dots$$

$\Rightarrow a_n-a_1=\frac{n^2+n-2}{4}\Rightarrow$(1p) $a_n=a_1+\frac{n^2+n-2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{n^2+n-2}{4}\Rightarrow a_n=\frac{n^2+n}{4}$. (1p)

2. Deoarece $\left[\frac{k^{n+1}+k+1}{k^n+1}\right]=\left[k+\frac{1}{k^n+1}\right]=k,(\forall)\,k\in N^*$, rezultă că:

   $a_p=2+3+\dots+p$, adică $a_p=\frac{p(p+1)}{2}-1,\quad(\forall)p\geq 2$. (2p)

Pe de altă parte: $b_n=6\left(\sum\limits_{p=2}^{n}a_p-1\right)=3\cdot\sum\limits_{p=1}^{n}p(p+1)-6(n+1)=n(n+1)(n+2)-6(n+1)$

(s – a ținut cont că: $\sum\limits_{p=1}^{n}p(p+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$), adică

$b_n=(n+1)\cdot(n^2+2n-6),(\forall)\,n\geq 2$. (3p)

Atunci limita cerută va fi egală cu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\ln(n+1)(n^2+2n-6)-3n^2\ln(n+1)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n^2+2n-6)^{n^2}-\ln(n+1)^{2n^2}\right)=$$

$=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-6}{(n+1)^2}\right)^{n^2}=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{(n+1)^2}\right)^{n^2}=\ln e^{-7}=-7$. Astfel problema este rezolvată. (2p)

3. Fie $f:R\to R$ o functie periodica si T > 0 o perioada . Exista $a,b\in R: f(a)\neq f(b)$.
   Alegem sirurile $x_n=nT+a\to\infty$, $y_n=nT+b\to\infty$ .Atunci
   $f(x_n)=f(nT+a)=f(a)\to f(a)$
   respectiv $f(y_n)=f(nT+b)=f(b)\to f(b)$, deci f nu are limita spre +∞

4. Ecuatia caracteristica este $r^2 - Tr(A) \cdot r + \det(A) = 0$, adica $r^2 - 2\cos\alpha \cdot r + 1 = 0$, cu solutiile

$r_{1,2} = \cos\alpha \pm i \cdot \sin\alpha$. Atunci $A^n = A_1 \sin n\alpha + A_2 \cos n\alpha, (\forall) n \geq 0$.

$n = 0 \Rightarrow A_2 = I_2$; $n = 1 \Rightarrow A_1 \sin\alpha + I_2 \cos\alpha = A$, de unde obtinem $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Deci

$$A^n = \sin n\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \cos n\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin n\alpha + \cos n\alpha & 2\sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha - \sin n\alpha \end{pmatrix}.$$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

COLEGIUL TEHNIC “EDMOND NICOLAU”

Str. 1 Decembrie 1918, nr. 10, tel: 0237/213784

Focsani-Vrancea

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

CLASA a XI-a MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

SUBIECTUL I

Fie $A \in M_3(R)$ cu proprietatea ca suma elementelor de pe fiecare linie si coloana este 1, iar elementele de pe diadonala principala sunt $\frac{1}{2}$. Aratati ca $\det A > 0$.

SUBIECTUL II

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sa se determine sirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ *si* $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel incat

$A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2$.

Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

SUBIECTUL III

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un sir de numere reale cu $a_1 > 1$ si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 a_2 \ldots a_n, \forall n \geq 2$.

Sa se arate ca $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent catre 1.

G.M.

SUBIECTUL IV

Fie ecuatia $X^2 = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2012 & 1 \end{pmatrix}, X \in M_2(C)$.

a) Sa se rezolve ecuatia.
b) Daca $X_{1,2,3,4}$ sunt solutiile ecuatiei sa se calculeze $X_1^{2013} + X_2^{2013} + X_3^{2013} + X_4^{2013}$

Subiecte prelucrate de

Prof. Cenţa Răvaş

BAREM CLASA a XI-a MATE – INFO.

SUBIECTUL I

$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2}-a \\ \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, a\in R$(2 p)

Din $L_1=L_1+L_2+L_3(1p)$ si apoi $C_1=C_1+C_2+C_3\ (1\ p)$obtinem

$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & a \\ 1 & \frac{1}{2}-a & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=3a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{4}$(2 p)

Finalizare $\det A=3\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}>0, \forall a\in R$.(1 p)

SUBIECTUL II

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sa se determine sirurile $(x_n)_{n\geq 1}\ si\ (y_n)_{n\geq 1}$ astfel incat

$A^n=x_n\cdot A+y_n\cdot I_2$.

$A^1=1\cdot A+0\cdot I_2 deci\ x_1=1\ si\ y_1=0$(0,5 p)

Cum $A^2-Tr(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2$(0,5 p)

$A^2=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}=5\cdot A-4\cdot I_2$ (0,5 p)

$A^{n+1}=A^n\cdot A=A(x_n\cdot A+y_n\cdot I_2)=(5x_n+y_n)A-4x_nI_2$(1 p)

Obtinem $x_{n+1}=5x_n-4x_{n-1}\ de\ unde\ x_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$(2,5 p)

Si $y_{n+1}=-4x_n\ deci\ y_n=\frac{4}{3}(1-4^{n-1})$(1 p)

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=-1$(1 p)

SUBIECTUL III

Din relatia din enunt se obtine :

$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} \forall n \geq 2$ (2p)

Demonstram prin inductie $P(n)$: $a_n > 1, \forall n \geq 1$

Evident P(1) adevarat din ipoteza

$P(n+1)$: $a_{n+1} - 1 = a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1} > 0$ (2 p)

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n^2 - a_n + 1} < 1, \forall n \geq 2$ (2 p)

Deci sirul este convergent(descrescator si marginit inferior de 1)

Trecand la limita in relatia de recurenta obtinem $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$(1 p)

SUBIECTUL IV

a) $\det(X^2) = (\det X)^2 = \det A = 1 \Rightarrow \det X = \pm 1$(1 p)

Aplicam relatia Cayley-Hamilton:

$X^2 - Tr\,(X) \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$(0,5 p)

De unde $Tr\,(X) \cdot X = \det X \cdot I_2 + X^2$(0,5 p)

Cazul i) det X=1

Notam Tr(X)=t deci $Tr(t \cdot X) = Tr\begin{pmatrix} 2014 & 1 \\ 2012 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t^2 = 2016 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2016}$(1 p)

Obtinem $X_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2016}} \begin{pmatrix} 2014 & 1 \\ 2012 & 2 \end{pmatrix}$(1 p)

Cazul ii) det X=-1

Notam Tr(X)=t deci $Tr(t \cdot X) = Tr\begin{pmatrix} 2012 & 1 \\ 2012 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t^2 = 2012 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2012}$(1 p)

Obtinem $X_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2012}} \begin{pmatrix} 2012 & 1 \\ 2012 & 0 \end{pmatrix}$(1 p)

b) Observam $X_2 = -X_1$ *si* $X_4 = -X_3$

$X_1^{2013} - X_1^{2013} + X_3^{2013} - X_3^{2013} = O_2$(2 p)

Inspectoratul Scolar al JudetuluiVrancea

OLIMPIADA DE MATEMATICA

Etapalocala Adjud-09 februarie 2013

CLASA a XI-a

Subiectul 1.

Fie sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definitprin $x_0 = a \in (0,1)$ si $x_n^2 = x_n - x_{n+1}, \forall x \in \mathbb{N}$.

Daca $y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ calculati L=$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Subiectul 2.

Calculati: L= $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left(\left[\frac{1}{x^2} \right] + \left[\frac{2}{x^2} \right] + \ldots + \left[\frac{k}{x^2} \right] \right), k \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 3.

Se consideramatricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculati A^{2013} .

Subiectul 4.

Fie A, B, C treimatricepatratice de ordin n cu elementerealeastfelincat BA+BC+AC=I_n sidet(A+B)=0. Sa se aratecadet(A+B+C-BAC)=0.

GM. Nr. 9/2012

Subiectepropuse de : prof. Dorneanu Angela , LiceulTeoretic “Emil Botta” Adjud

Nota:

- *Toatesubiectelesuntobligatorii.*
- *Timp de lucru 3 ore.*
- *Fiecaresubiect se noteaza de la 0 la 7 puncte*

Barem de corecturasinotare:

Subiectul 1:

$x_n - x_{n+1} = x_n^2 \geq 0 \Rightarrow$ sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estedescrescator……………………………………………………1p

Demonstramprininductieca :

$x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}$ …………………………………………………………...1p

Din monotoniesimarginire $\Rightarrow sirul(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent…………………………………………1p

Printrecere la limita in relatia de recurenta $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ =0……………………………………………………1p

$$y_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}} \overset{1p}{=} \frac{x_{n-1}^2}{x_n \cdot x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{x_n} \overset{1p}{=} \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-1}^2} = \frac{1}{1 - x_{n-1}}, \forall n \geq 1$$

Finalizare:

L=1………………………………………………………………………………………………………1p

Subiectul 2:

Folosiminegalitatea: $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$ ……………………………………………1p

$$\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} - 1 + ... + \frac{k}{x^2} - 1 < \left[\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{2}{x^2}\right] + ... + \left[\frac{k}{x^2}\right] \leq \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} + ... + \frac{k}{x^2}$$ ………………………………2p

$$\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{x^2} - k < \left[\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{2}{x^2}\right] + ... + \left[\frac{k}{x^2}\right] \leq \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{x^2}$$ …………………………………………………………2p

$$\frac{k(k+1)}{2} - x^2 < x^2 \cdot \left(\left[\frac{1}{x^2}\right] + ... + \left[\frac{k}{x^2}\right]\right) \leq \frac{k(k+1)}{2}$$ ……………………………………………………1p

Finalizare: Din TeoremaClestelui:

L= $\frac{k(k+1)}{2}$ ……………………………………………………1p

Subiectul 3.

Fie

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ………………………………………………………………………………1p

Pentrucamatricilecomutaputemaplicabinomulluinewton………………………………..….1p

$$A^n=\left(D+I_3\right)^n\overset{1p}{=}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot I^{n-k}\cdot D^k\overset{1p}{=}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot D^k$$

$D^n=O_3, n\geq 3$ ……………………………………………………………………………………..1p

$$A^n=C_n^0\cdot I_3+C_n^1\cdot D+C_n^2\cdot D^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ -n & 1 & -\frac{n}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ …………………………………………1p

Finalizare $$A^{2013}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2013\\ -2013 & 1 & -\frac{2013^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ ………………………………………………….. 1p

Subiectul 4.

Prininmultirea la dreapta cu C a relatiei: BA+BC+AC= I_n ………………….1p se obtine:

$BAC+BC^2+AC^2=C$ …………………………………………………..…………1p

$BAC=C-(B+A)C^2$ ……………………………………………………………………….……..1p

$A+B+C-BAC=A+B+(B+A)C^2$ ……………………………………………………….…1p

$A+B+C-BAC=(A+B)(I_n+C^2)$ ………………………………………………………………..1p

$$\det\left(A+B+C-BAC\right)=\det\left((B+A)(I_n+C^2)\right)\overset{1p}{=}\det(B+A)\cdot\det(I_n+C^2)\overset{1p}{=}0.$$