

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a VIII– a
Barem de corectare

Subiectul 1.

- a) Fie a și b două numere naturale. Știind că mulțimea $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține un singur element arătați că $\sqrt{a \cdot b + 1}$ este un număr rațional.
- b) Fie a, b și c trei numere naturale nenule. Știind că $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține 5 elemente și că $(c,b) \cap \mathbb{N}$ conține 3 elemente. Arătați ca $\sqrt{a^b + a^c}$ este irațional.
- a) $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține un singur element $\Rightarrow b=a+2$ **2p**
Atunci $\sqrt{a \cdot b + 1} = \sqrt{a \cdot (a+2) + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1|$ **2p**
- b) $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține 5 elemente $\Rightarrow b=a+6$, iar $(c,b) \cap \mathbb{N}$ conține 3 elemente $\Rightarrow b=c+4$, $c=a+2$... **1p**
 $\sqrt{a^b + a^c} = \sqrt{a^{a+6} + a^{a+2}} = \sqrt{a^{a+2}(1+a^4)}$
Pentru $a=1 \Rightarrow \sqrt{a^b + a^c} = \sqrt{2}$ **1p**
Pentru $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{a^b + a^c} = \sqrt{a^{a+2} + a^{a+6}} = \sqrt{a^{a-2} \cdot a^4(1+a^4)}$ **1p**
 $a^4(1+a^4)$ produs de două numere consecutive $\Rightarrow \sqrt{a^b + a^c}$ irațional **1p**

Subiectul 2.

- a) Dacă $x, y > 0$, să se arate că $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
- b) Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că:
$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$
- a) Avem
 $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2xy}{x+y} \quad (m_a \geq m_h)$ **2p**
 $\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \Leftrightarrow \frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **1p**
- b) Din a) avem $\frac{4}{(a+b)^2 + (a+c)^2} \leq \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2}$ (și analogele) **1p**
Prin însumare se obține:
$$\frac{4}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{4}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{4}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq 2 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right]$$
 1p
Dar $\sum \frac{1}{(a+b)^2} \leq \sum \frac{1}{4ab} \left(\frac{1}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4ab} \text{ din a) } \right)$
$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$
 **1p**

$$\frac{1}{ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (m_a \geq m_b) \text{ și analoagele, finalizare} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3.

Fie ABCD un romb cu $AB = 6 \text{ cm}$ și $m(\hat{A}) = 45^\circ$. În punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABD, se ridică perpendiculara OM pe planul rombului, $OM = 4 \text{ cm}$. Aflați:

a) Distanța de la punctul O la planul (MBC).

b) Cosinusul unghiului dintre planele (MBC) și (ABC).

a) Fie d mediatoarea laturii (AD), iar $\{O\} = d \cap AC$ centrul cercului circumscris triunghiului ABD, $\{N\} = d \cap AD$, $\{P\} = d \cap BC$, $\{R\} = d \cap AB$.

Figura geometrică..... 1p

Justificarea $MP \perp BC$, $d(O, (MBC)) = OQ$ 2p

ΔANR dreptunghic și isoscel, $AN = NR = 3$, $AR = 3\sqrt{2}$; ΔBPR dreptunghic și isoscel, $RB = AB - AR = 3(2 - \sqrt{2})$, $RP = PB = 3(\sqrt{2} - 1)$ 1p

$\Delta AON \sim \Delta COP \Rightarrow \frac{NO}{OP} = \frac{AN}{CP} \Leftrightarrow \frac{NO}{OP} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow OP = 3$ 1p

ΔMOP dreptunghic, $MP = 5$, $OQ = \frac{OM \cdot OP}{MP} = \frac{12}{5}$ 1p

b) Unghiul dintre planele (MBC) și (ABC) este $\angle OPM$ (justificare)

$\cos(\angle OPM) = \frac{3}{5}$ 1p

Subiectul 4.

Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată dreaptă, cu $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $AA' = 12 \text{ cm}$ și P un punct pe CC'.

a) Determinați poziția punctului P pe CC' știind că aria triunghiului PAB este $12\sqrt{6} \text{ cm}^2$

b) Determinați sinusul unghiului dintre AC și C'M unde M este mijlocul lui AB.

a) figura 1p

Ducem $CM \perp AB \Rightarrow$ conform teoremei celor trei perpendiculare $PM \perp AB$ 1p

$A_{\Delta PAB} = \frac{PM \cdot AB}{2} \Rightarrow PM = 6\sqrt{2}$. Deci, $CP = 6$ 1p

b) Ducem $MQ \perp AC$ și cum $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp MQ \Rightarrow MQ \perp (ACC')$

Ducem $QT \perp A'C'$. Conform teoremei celor trei perpendiculare avem că $MT \perp A'C'$ 1p

$A_{\Delta MA'C'} = \frac{A'C' \cdot C'M \cdot \sin(\angle MC'A')}{2} = \frac{MT \cdot A'C'}{2}$ 1p

$MT = 3\sqrt{17}$, $C'M = 6\sqrt{5}$ 1p

$\sin(\angle MPN) = \frac{\sqrt{85}}{10}$ 1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a VIII– a

1. a) Fie a și b două numere naturale. Știind că mulțimea $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține un singur element arătați că $\sqrt{a \cdot b + 1}$ este un număr rațional.

b) Fie a , b și c trei numere naturale nenule. Știind că mulțimea $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține 5 elemente și că mulțimea $(c,b) \cap \mathbb{N}$ conține 3 elemente. Arătați ca $\sqrt{a^b + a^c}$ este irațional.

prof. Zetea Bogdan

2. a) Dacă $x, y > 0$, să se arate că $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

b) Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că:

$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

GM. 11/2012

3. Fie $ABCD$ un romb cu $AB = 6 \text{ cm}$ și $m(\hat{A}) = 45^\circ$. În punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABD , se ridică perpendiculara OM pe planul rombului, $OM = 4 \text{ cm}$. Aflați:

a) Distanța de la punctul O la planul (MBC) .

b) Cosinusul unghiului dintre planele (MBC) și (ABC) .

prof. Marinela Mihali

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prisma triunghiulară regulată dreaptă, cu $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $AA' = 12 \text{ cm}$ și P un punct pe CC' .

a) Determinați poziția punctului P pe CC' știind că aria triunghiului PAB este $12\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

b) Determinați sinusul unghiului dintre AC și $C'M$ unde M este mijlocul lui AB .

prof. Zetea Bogdan

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de:

prof. Marinela Mihali, Liceul Borșa.

prof. Bogdan Zetea, Școala Gimnazială „George Coșbuc”, Sighetu Marmăției

SUCCES!