Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SUBIECTE

1. Să se demonstreze că $\dfrac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{11}}}+\dfrac{\sqrt{36-10\sqrt{11}}}{2}\in\mathbb{N}$.

2. Să se arate, că pentru oricare $a,b\in\mathbb{N}$ are loc inegalitatea:
$$\frac{a^2}{4\sqrt{2}}+\frac{b^2}{4\sqrt{3}}\geq\frac{ab}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

3. a) Să se determine mulțimile
$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\leq x\leq 3\} \text{ și } B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{4x^2+17}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$$
b) Să se determine $A\cap B$

4. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB=4$cm și $AA'=3\sqrt{6}$ cm. Fie M și N mijloacele muchiilor AB și BC.
a) Să se calculeze aria triunghiului $D'MN$.
b) Să se calculeze măsura unghiului determinat de planele $(D'MN)$ și (ABC).
c) Să se calculeze distanța punctului D de planul $D'MN$.

5. În rombul $ABCD$ sunt date $AB=10$ cm, $m(\widehat{BAD})=60°$, $AC\cap BD=\{O\}$, M și N fiind mijloacele laturilor AB și AD. Deasupra planului rombului construim piramidele triunghiulare regulate $PAMN$ și $RBCD$ cu vârfurile P și R în așa fel, ca $[PA]\equiv[AM]$ și $[RB]\equiv[BC]$.
a) Să se calculeze lungimea segmentului PR.
b) Dacă $AP\cap CR=\{S\}$, să se demonstreze, că $SO\perp(ABC)$!

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.