INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 21.02.2016

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că numărul 53361 este pătrat perfect şi se divide cu 33.
b) Câte numere de forma $\overline{abcde}$ sunt pătrate perfecte şi se divid cu 33 ?

S.G.M.

SUBIECTUL 2

a) Calculaţi $\dfrac{9^5+8\cdot 3^5+12}{3^6+6}$.

b) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, numărul $\dfrac{9^n+8\cdot 3^n+12}{3^{n+1}+6}$ este natural.

R.M.T.

SUBIECTUL 3

Fie unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA în jurul punctului O, astfel încât
$1\cdot m(\sphericalangle AOB)=2\cdot m(\sphericalangle BOC)$, $3\cdot m(\sphericalangle COD)=4\cdot m(\sphericalangle DOE)$, $5\cdot m(\sphericalangle DOE)=6\cdot m(\sphericalangle EOA)$.
Dacă semidreapta [OA şi bisectoarea unghiului COD formează un unghi alungit, aflaţi măsurile celor cinci unghiuri.

SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul obtuzunghic isoscel ABC de bază [BC].
Pe bisectoarea unghiului C se ia punctul M, iar pe bisectoarea unghiului B se ia punctul N, astfel încât $m(\sphericalangle BMC)=m(\sphericalangle BNC)=90^0$. Dacă $BM\cap AC=\{Q\}$, $CN\cap AB=\{P\}$, $BM\cap CN=\{D\}$, iar E este mijlocul laturii [BC], demonstraţi:

a) $[BP]\equiv[BC]\equiv[QC]$.
b) Punctele D, A, E sunt coliniare.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 2 ore.

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că numărul 53361 este pătrat perfect şi se divide cu 33.

b) Câte numere de forma $\overline{abcde}$ sunt pătrate perfecte şi se divid cu 33 ?

a) $53361=3^2\cdot7^2\cdot11^2=(3\cdot7\cdot11)^2$, este pătrat perfect şi se divide cu 33.	**3p**
b) Dacă $\overline{abcde}$ este pătrat perfect şi se divide cu 33, atunci el se divide cu $33^2=1089$.	**2p**
Numerele de cinci cifre $\overline{abcde}$ pătrate perfecte care se divid cu 33 se obţin calculând: $1089\cdot4^2$, $1089\cdot5^2$, … , $1089\cdot9^2$.	**1p**
Sunt 6 numere.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) Calculaţi $\dfrac{9^5+8\cdot3^5+12}{3^6+6}$.

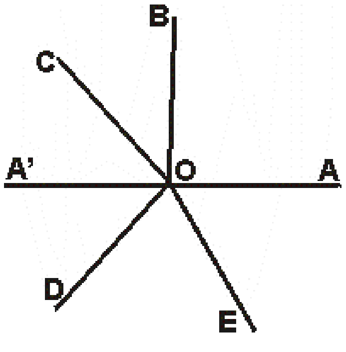
b) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, numărul $\dfrac{9^n+8\cdot3^n+12}{3^{n+1}+6}$ **este natural.**

a) Calcul numărător(61005).	**1p**
Calcul numitor(735).	**1p**
Rezultat 83.	**1p**
b) $\dfrac{9^n+8\cdot3^n+12}{3^{n+1}+6}=\dfrac{3^{2n}+2\cdot3^n+6\cdot3^n+12}{3\cdot3^n+6}$	**1p**
$=\dfrac{3^n\left(3^n+2\right)+6\left(3^n+2\right)}{3\left(3^n+2\right)}$	**1p**
$=\dfrac{\left(3^n+2\right)\left(3^n+6\right)}{3\left(3^n+2\right)}$	**1p**
$=\dfrac{3^n+6}{3}=3^{n-1}+2\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**1p**

OBS: Dacă rezolvă direct b) şi înlocuieşte n=5, obţinând $3^4+2=83$, obţine punctaj maxim.

SUBIECTUL 3

Fie unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA în jurul punctului O, astfel încât 1· m(∢AOB)=2· m(∢BOC), 3· m(∢COD)=4· m(∢DOE), 5· m(∢DOE)=6· m(∢EOA). Dacă semidreapta [OA şi bisectoarea unghiului COD formează un unghi alungit, aflaţi măsurile celor cinci unghiuri.



Se poate nota m(∢BOC) = x, m(∢AOB) = 2x, m(∢COD) = 4y, m(∢DOE) = 3y, m(∢EOA) = $\frac{5}{2}$y . Iar dacă [OA' este bisectoarea unghiului COD, atunci m(∢COA') = m(∢DOA') = 2y. Sau scrie m(∢COD) = $\frac{4}{3}$ · m(∢DOE) şi m(∢EOA) = $\frac{5}{6}$ · m(∢DOE).	**1p**
Avem: 2y+3y+$\frac{5}{2}$y =180^0. Sau $\frac{2}{3}$ · m(∢DOE)+m(∢DOE)+$\frac{5}{6}$ · m(∢DOE)=180^0.	**2p**
y = 24^0 şi de aici m(∢COD) = 96^0,. m(∢DOE) = 72^0,. m(∢EOA) = 60^0.	**2p**
m(∢AOC)=180^0 − 48^0=132^0 =3x,.de unde x=44^0=m(∢BOC) şi m(∢AOB)=88^0.	**2p**

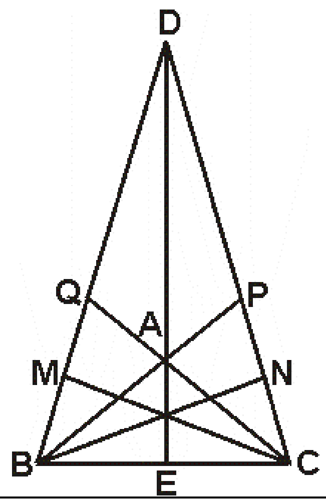
SUBIECTUL 4

Se consideră triunghiul obtuzunghic isoscel ABC de bază [BC]. Pe bisectoarea unghiului C se ia punctul M, iar pe bisectoarea unghiului B se ia punctul N, astfel încât $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BNC) = 90^0$.

Dacă $BM \cap AC = \{Q\}$, $CN \cap AB = \{P\}$, $BM \cap CN = \{D\}$, iar E este mijlocul laturii [BC], demonstraţi:

a) [BP] ≡ [BC] ≡ [QC].

b) Punctele D, A, E sunt coliniare.

	**a)** ΔBNC≡ΔBNP(ULU) $\Rightarrow$ [BP]≡[BC].	**1p**
	ΔCMB≡ΔCMQ(ULU) $\Rightarrow$ [BC]≡[QC].	**1p**
	Şi atunci [BP] ≡ [BC] ≡ [QC].	**1p**
	b) ΔQBC≡ΔPCB(LUL) $\Rightarrow$ ∢QBC≡∢PCB $\Rightarrow$ ∢DBC≡∢DCB $\Rightarrow$ ΔDBC≡ΔDCB(ULU) $\Rightarrow$ [DB]≡[DC] (Sau scrie direct ∢QBC≡∢PCB $\Rightarrow$ [DB]≡[DC]).	**2p**
	ΔDAB≡ΔDAC(LLL) $\Rightarrow$ [DA este bisectoarea unghiului D. ΔDEB≡ΔDEC(LLL) $\Rightarrow$ [DE este bisectoarea unghiului D. Şi atunci D, A, E sunt coliniare. Sau arată că [AD şi [AE sunt bisectoarele unghiurilor opuse la vârf PAQ, respectiv BAC.	**2p**