OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a V-a

Subiecte:

1. Fie $a = (3^1 + 3^0)(3^{20} \cdot 3^{31})^2 + 3^{103}$ și $b = 2(9^{50} + 9^{51})$

   a) Să se arate că $a > b$.
   b) Să se arate că numărul $c = 35ab$ este pătrat perfect.
   c) Să se determine restul împărțirii lui a la b.

2. Dintr-un număr A de patru cifre, scris în baza zece, ștergem ultima cifră, iar numărul obținut îl adunăm la A și obținem 2014.Care este numărul A ?

3. Fie M mulțimea numerelor naturale impare care, împărțite la 100, dau câtul egal cu restul.
   a) Să se găsească trei elemente ale mulțimii M .
   b) Să se determine numărul elementelor lui M .
   c) Dacă $P = \{5k | k \in \mathbb{N}\}$,să se găsească numărul elementelor mulțimii $M \cap P$.

4. Se consideră mulțimea $A = \{10, 10^2, 10^{2013}, 10^{2014}\}$. Să se arate că fiecare element al lui A se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a V-a

1. a) Se obține $a = 3^{102}(4+3) = 7 \cdot 3^{102}$ și $b = 2 \cdot 9^{50}(1+9) = 20 \cdot 9^{50} = 20 \cdot 3^{100}$
   $a = 7 \cdot 3^{2} \cdot 3^{100} = 63 \cdot 3^{100} > 20 \cdot 3^{100}$, deci $a > b$ ……………………………………….… 2p

   b) $ab = 140 \cdot 3^{202}$ iar $c = 35 \cdot 140 \cdot 3^{202} = 35 \cdot 4 \cdot 35 \cdot 3^{202} = 2^2 \cdot 35^2 \cdot \left(3^{101}\right)^2 = \left(2 \cdot 35 \cdot 3^{101}\right)^2$
   …………………………………………………………………………………….2p

   c) $a = 63 \cdot 3^{100} = 60 \cdot 3^{100} + 3 \cdot 3^{100} = 3 \cdot 20 \cdot 3^{100} + 3 \cdot 3^{100} = 3b + 3^{101}$. Deoarece $3^{101} = 3 \cdot 3^{100} < b$
   restul este 3^{101} ……………………………………………………………………..3p

2. Dacă $A = \overline{abcd}$, va rezulta $\overline{abcd} + \overline{abc} = 2014$, deci
   $1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c = 1100a + 110b + 11c + d = 2014$ deci $a = 1$ și
   $110b + 11c + d = 914$ ……………………………………………………………………3p
   $b \le 7$ și $b = 9$ nu verifică, va rezulta $b = 8$ și $11c + d = 34$ …………………………………...2p
   Rezultă $c = 3$, $d = 1$ și numărul este 1831…………………………………………………   2p

3. a) $n = 100c + c$ deci $n = 101c, c < 100$, va rezulta c impar,de exemplu numerele $101, 303, 505$ aparțin lui M
   ………………………………………………………………………………………2p
   b) Elementele lui M sunt $101 \cdot 1, 101 \cdot 3, 101 \cdot 5, \ldots \ldots .101 \cdot 99$, în total 50 de elemente
   .. ……………………………………………………………………………………3p
   c) Multiplii impari ai lui 5 de la 1 la 99 sunt:$5 \cdot 1,\ 5 \cdot 3,\ 5 \cdot 5, \ldots, 5 \cdot 19$ deci mulțimea $M \cap P$ va avea 10 elemente……………………………………………………………2p

4. $10 = 1^2 + 3^2$ …………………………………………………………………… 1p
   $100 = 6^2 + 8^2$ ……………………………………………………………………2p
   $10^{2013} = 10^{2012} \cdot 10 = (10^{1006})^2 \cdot (1^2 + 3^2) = (10^{1006})^2 + (3 \cdot 10^{1006})^2$ ………..… 2p
   $10^{2014} = 10^{2012} \cdot 10^2 = (10^{1006})^2 \cdot (6^2 + 8^2) = (6 \cdot 10^{1006})^2 + (8 \cdot 10^{1006})^2$ ……. 2p