**INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**ETAPA LOCALĂ, 27.02.2016**
**Clasa a XII-a**

**1. (7p)** Se consideră $n \in N^*$ şi $f:(0,\infty) \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x + x^{n+1} + x^{2n+1} + x^{3n+1}}$. Determinaţi primitivele funcţiei *f*.

*Petru Vlad*

**2. (7p)** $(G, \cdot)$ este un grup pentru care există un număr natural *n*, $n \geq 3$, astfel încât $\forall x, y \in G,\ (xy)^n = x^n \cdot y^n, (xy)^{n+1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1}, (xy)^{n+2} = x^{n+2} \cdot y^{n+2}$. Arătaţi că grupul este comutativ.

***

**3. (7p)** Se consideră numerele reale *a, b* şi funcţia continuă $f : R \to R$ cu proprietatea că $\int_{at}^{bt} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} f(x)dx$, oricare ar fi $t \in (0,2)$. Demonstrați că $af(a) = bf(b)$.

*GM10/2014*

**4.** Pe mulţimea $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$ se defineşte legea $x * y = x^{\ln y}$. Se ştie că $(G,*)$ este grup comutativ cu elementul neutru *e*, baza logaritmului natural.

**(4p) a)** Dacă $H = \left\{ e^{\alpha} \mid \alpha \in Q^* \right\}$, arătaţi că *H* este subgrup al grupului $(G,*)$.

**(3p) b)** Considerând grupul $\left(R^*, \cdot\right)$, arătaţi că $f : G \to R^*,\ f(x) = \ln x$ este un izomorfism de grupuri.

***

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

**Barem de corectare OLM 2016 Clasa a XII-a**

**1.** $x+x^{n+1}+x^{2n+1}+x^{3n+1}=x\left(1+x^n\right)\left(1+x^{2n}\right)$ ......................................................................... **(1p)**

$I=\int\frac{dx}{x\left(1+x^n\right)\left(1+x^{2n}\right)}$, $J=\int\frac{x^n dx}{x\left(1+x^n\right)\left(1+x^{2n}\right)}$ ......................................................................... **(1p)**

$I+J=\int\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}\left(1+x^{2n}\right)}dx=\frac{1}{2n}\ln\frac{1+x^{2n}}{x^{2n}}+c_1, c_1\in R$ ......................................................................... **(1p)**

$\frac{1-x^n}{x\left(1+x^n\right)\left(1+x^{2n}\right)}=\frac{1}{x+x^{n+1}}-\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$ ......................................................................... **(1p)**

$I-J=\int\frac{x^{n-1}}{x^n(1+x^n)}dx-\int\frac{x^{n-1}}{1+\left(x^n\right)^2}dx=\frac{1}{n}\ln\frac{1+x^n}{x^n}-\frac{1}{n}arctg\left(x^n\right)+c_2, c_2\in R$ ........................... **(2p)**

Finalizare $I=\frac{1}{4n}\ln\frac{\left(1+x^{2n}\right)\left(1+x^n\right)^2}{x^{4n}}-\frac{1}{2n}arctg\left(x^n\right)+c, c\in R$ ............................................. **(1p)**

*Sau*

$I=\int\frac{x^{n-1}}{x^n\left(1+x^n\right)\left(1+x^{2n}\right)}dx,\ x^n=t\Rightarrow I_t=\frac{1}{n}\int\frac{dt}{t(1+t)\left(1+t^2\right)}$ ..................................................... **(3p)**

Rezolvarea integralei ......................................................................................... **(4p)**

**2.** $(xy)^{n+1}=x^{n+1}\cdot y^{n+1}\Leftrightarrow(xy)^n xy=x^{n+1}\cdot y^{n+1}\Leftrightarrow x^n y^n xy=x^{n+1}\cdot y^{n+1}\Leftrightarrow y^n x=xy^n$ .............. **(2p)**

$(xy)^{n+2}=x^{n+2}\cdot y^{n+2}\Leftrightarrow(xy)^{n+1}xy=x^{n+2}\cdot y^{n+2}\Leftrightarrow x^{n+1}y^{n+1}xy=x^{n+2}\cdot y^{n+2}\Leftrightarrow y^{n+1}x=xy^{n+1}$ .... **(2p)**

$y^{n+1}x=y\cdot y^n x=y\cdot xy^n$ ......................................................................................... **(1p)**

$y\cdot xy^n=xy^{n+1}\Leftrightarrow yx=xy$ ......................................................................................... **(2p)**

**3.** *f* continuă $\Rightarrow$ *f* admite primitive pe $R$; fie $F:R\to R$ o primitivă pentru *f*. Din relaţia dată avem $F(bt)-F(at)\le F(b)-F(a),\forall t\in(0,2)$ ......................................................................... **(1p)**

Notăm $F(bt)-F(at)=G(t)$, $G:(0,2)\to R, G$ derivabilă $\Rightarrow G(t)\le G(1),\forall t\in(0,2)$ ........ **(2p)**

$t=1$ punct de maxim pentru funcţia *G* ......................................................................................... **(1p)**

Din teorema lui Fermat rezultă că $G'(1)=0$ ......................................................................... **(1p)**

$G'(t)=F'(bt)\cdot b-F'(at)\cdot a=f(bt)\cdot b-f(at)\cdot a$ ......................................................................... **(1p)**

$G'(1)=f(b)\cdot b-f(a)\cdot a=0\Leftrightarrow af(a)=bf(b)$ ......................................................................... **(1p)**

**4. a)** $\forall\, x, y \in H$ , $x * y \in H$ .............................................................................................. **(2p)**
$\forall\, x \in H, x' \in H$ ..............................................................................................................
**(2p)**
**b)** Se ştie că *f* este bijectivă .............................................................................................. **(1p)**
*f* este morfism deoarece $f(x * y) = f(x^{\ln y}) = \ln\left(x^{\ln y}\right) = \ln x \cdot \ln y = f\left(x\right) \cdot f\left(y\right)$ ............... **(2p)**