

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (4 ore)

- 1.) Determinați numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , știind că:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 2.) Fie a_1, a_2, \dots, a_{12} termenii unei progresii geometrice crescătoare cu termeni pozitivi.

Demonstrați că: $a_{12} - a_1 > 11(a_7 - a_6)$

- 3.) Știind că a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $c^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) \cdot x + b^2 = 0$.

- 4.) În patrulaterul convex $ABCD$, M și N sunt mijloacele laturilor (BC) respectiv (CD) .

Notăm cu P intersecția dreptelor AM și BN , știind că $\frac{PA}{PM} = k$ și $\frac{BP}{PN} = \frac{k}{k+2}$:

a.) Să se demonstreze că $ABCD$ este trapez.

b.) Să se determine valoarea lui k , astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.	Din oficiu	1p
	Vom folosi inducția matematică: $n=1 \quad a_1^2 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1$ $n=2 \quad a_1^2 + a_2^2 = a_1 + a_2 + 2 \Rightarrow a_2^2 - a_2 - 2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2$ Presupunem adevărat pentru un k -fixat: $a_k = k$	3p
	$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + a_{k+1}^2 = 1 + 2 + \dots + k + a_{k+1} + \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$	1p
	$\Rightarrow a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0 \Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow a_{k+1} = k+1 \Rightarrow a_n = n, \forall n \geq 1$	2p
2.	Din oficiu	1p
	Din condițiile inițiale: $a_n = a_1 r^{n-1}$, unde $a_1 > 0, r > 1$	3p
	$a_{12} - a_1 > 11(a_7 - a_6) \Leftrightarrow a_1(r^{11} - 1) > 11a_1 r^5(r - 1) \Leftrightarrow r^{10} + \dots + r + 1 > 11r^5$	3p
	Folosind inegalitatea mediilor și faptul că $r > 1$, avem: $r^{10} + \dots + r + 1 > 11\sqrt[11]{r^{1+2+\dots+10}} = 11\sqrt[11]{r^{11 \cdot 5}} = 11r^5$	3p
3.	Din oficiu	1p
	a, b și c fiind laturile unui triunghi avem: $a, b, c > 0, a + b > c, a + c > b$ și $b + c > a$	2p
	Calculând discriminantul ecuației, avem: $\Delta = (b - c - a)(b - c + a)(b + c - a)(b + c + a)$	3p
	Cum din cei patru factori doar primul este negativ avem $\Delta < 0$, deci ecuația nu are soluții reale.	3p
	$M = \emptyset$	1p
4.	Din oficiu	1p
a.)	$\overrightarrow{AP} = \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \frac{k}{k+1} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right)$	2p
	$\overrightarrow{BP} = \frac{k}{2k+2} \overrightarrow{BN} = \frac{k}{2k+2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = \frac{k}{2k+2} \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \right)$	2p
	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} = \frac{4k \overrightarrow{AB} - k \overrightarrow{CD}}{4k+4} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{k}{4} \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ este trapez.	3p
b.)	Pentru $k=4$ ABCD este paralelogram.	2p