INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928 , FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – etapa locală

9.02.2013-CLASA a XII-a

1. a) Să se determine o primitivă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}+1}{x^{2n+2}-2x^{n+1}+x^2+1}$, $n\in N^*$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x.\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2x}-\sin^2 x}dx, x\in(0,\infty)$.

2. Fie $M=\left\{x\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -9 & 3\end{pmatrix}+I_2 \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că :

a) $(M;\cdot)$ este grup comutativ ; **b)** $(M;\cdot)\cong(R_+^*,.)$

3. Fie (G, ·) un grup cu elementul neutru e. Pentru $a\in G$ şi $n\in N, n\geq 2$ se defineşte $f_a:G\to G$ astfel încât $f_a(x\cdot a)=a^n\cdot x\ (\forall)x\in G$.

Să se arate că f_a este automorfism de grupuri dacă si numai dacă $a^{n-1}=e$.

4. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă. Definim şirul $(x_n)_{n\in N}$ prin $x_0=\dfrac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\displaystyle\int_0^{x_n}f(t)dt\right)$ pentru $n\in N$.

Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze limita sa.

(G.M.11/2012)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

1.a) Pentru $x \neq 0$,

$$\int f(x)dx = \int \frac{nx^{n-1} + \frac{1}{x^2}}{x^{2n} - 2x^{n-1} + 1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{\left(x^n - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x^n - \frac{1}{x}\right)^2 + 1}dx = arctg\left(x^n - \frac{1}{x}\right) + \mathscr{C} = G(x) + \mathscr{C}$$ .....**(2p)**

O primitivă a funcției are forma :

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & , \quad x < 0 \\ c_1 & , \quad x = 0 \\ G(x) + c_2 & , \quad x > 0. \end{cases}$$

Cum $G(0-0) = \frac{\pi}{2}$, și $G(0+0) = -\frac{\pi}{2} + c_2$ se obține $c_1 = \frac{\pi}{2}$ și $c_2 = \pi$. ....**(1p)**

1.b) Integrala se poate scrie succesiv

$$\int \frac{\sin x.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{e^{2x} - \sin^2 x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin^2 x - \sin x.\cos x}{e^{2x} - \sin^2 x}dx(1p) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin^2 x - e^{2x} + e^{2x} - \sin x.\cos x}{e^{2x} - \sin^2 x}dx(2p) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int dx + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{(e^{2x} - \sin^2 x)'}{(e^{2x} - \sin^{2x})}dx =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(e^{2x} - \sin^2 x) + C(1p)$$

2. Se notează $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ și $M = \{A(x) = xA + I_2 \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.

a) $A^2 = O_2 \Rightarrow A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \in M$ (1p)

Asociativitatea , Comutativitatea (1p)

Elementul neutru , Elementele simetrizabile (1p)

b) Funcția $f : M \to \mathbb{R}$, $f(A(x)) = x (\forall) A(x) \in M$ este izomorfism de grupuri de la $(M,\cdot)$ la $(R,+)$ ………………………......................................(2p)

$(R,+) \cong (R_+^*,.)$ (ex.g:R$\to$$\mathbf{R}_+^*$, g(x)=e^x)……………………………(1p)

izomorfism de grupuri $(M;\cdot) \cong (R_+^*,.)$……………………….. (1p)

3. $f_a : G \to G;\quad f_a(x \cdot a) = a^n \cdot x\, (\forall) x \in G$

$x \to x \cdot a^{-1} \Rightarrow f_a(x) = a^n \cdot xa^{-1}$ ……................... .(1p)

“$\Rightarrow$” : f_a automorfism $\Rightarrow f$ morfism de grupuri $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_a(xy) = f_a(x) \cdot f_a(y) (\forall) x, y \in G \Rightarrow a^n xya^{-1} = a^n xa^{-1} \cdot a^n ya^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = xa^{n-1} \cdot y \Rightarrow a^{n-1} = e$ ....(2p)

“$\Rightarrow$” : $a^{n-1} = e \Rightarrow a^n = a \Rightarrow f(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ ....(1p)

f_a injectivă, f_a surjectivă................................ (2p)

f_a morfism .... (1p)

4. Se demonstrează că $x_n \geq 0, \forall n \in N$ (ind.) **(1p) ;**

Pentru că $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \in [0,1] \Rightarrow \int_o^{x_n} f(t)dt \leq \int_0^{x_n} dt = x_n$, de unde rezultă că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este descrecător**.(2p) .** Şirul fiind descrescător şi mărginit inferior este convergent**.(1p)**
În consecință şirul este convergent.

Cu teorema de medie rezultă că există $c_n \in [0, x_n]$ astfel încât $\int_o^{x_n} f(t)dt = x_n f(c_n)$. **(2p)**

Înlocuind în relația din enunț, se trece apoi la limită în relația obținută**.(1p)**

Orice soluție corectă se punctează cu 7 puncte.