Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a XII-a

Problema 1. Un inel $(A, +, \cdot)$ are proprietatea (P) dacă A este finit şi grupul multiplicativ al elementelor sale inversabile este izomorf cu un subgrup diferit de $\{0\}$ al grupului aditiv $(A, +)$. Arătaţi că:

(a) Dacă un inel are proprietatea (P), atunci numărul elementelor sale este par.

(b) Pentru o infinitate de numere naturale n, există inele cu exact n elemente, care au proprietatea (P).

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $f \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică. Dacă 2 este perioadă a lui f, arătaţi că:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq 2$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2$ dacă şi numai dacă 1 este perioadă a lui f.

Problema 3. Fie p un număr prim impar şi fie G un grup care are exact $p+1$ elemente. Arătaţi că, dacă p divide numărul automorfismelor lui G, atunci $p \equiv 3 \pmod 4$.

Problema 4. Fie $f \colon [0,1] \to [0,1]$ o funcţie crescătoare şi fie

$$a_n = \int_0^1 \frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Un inel $(A, +, \cdot)$ are proprietatea (P) dacă A este finit şi grupul multiplicativ al elementelor sale inversabile este izomorf cu un subgrup diferit de $\{0\}$ al grupului aditiv $(A, +)$. Arătaţi că:

(a) Dacă un inel are proprietatea (P), atunci numărul elementelor sale este par.

(b) Pentru o infinitate de numere naturale n, există inele cu exact n elemente, care au proprietatea (P).

Soluţie. **(a)** Fie A un inel care are proprietatea (P) şi fie $m = |U(A)|$. Rezultă că $(-1)^m = 1$.

Dacă m este impar, atunci $-1 = 1$, deci $\operatorname{ord}(1) = 2$ în grupul aditiv $(A, +)$ şi prin urmare $|A|$ este par. .... **2 puncte**

Dacă m este par, cum m este un divizor al lui $|A|$, rezultă că $|A|$ este par.
.... **2 puncte**

(b) Fie m un număr natural nenul, fie $n = 2^{m+2}$ şi fie $A = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{m} \times \mathbb{Z}_4$.

Atunci grupul multiplicativ $U(A) = \{(\hat{1}, \ldots, \hat{1}, \hat{1}), (\hat{1}, \ldots, \hat{1}, \hat{3})\}$ este izomorf cu subgrupul $\{(\hat{0}, \ldots, \hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \ldots, \hat{0}, \hat{2})\}$ al grupului aditiv $(A, +)$.
.... **3 puncte**

Problema 2. Fie $f \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică. Dacă 2 este perioadă a lui f, arătaţi că:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq 2$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2$ dacă şi numai dacă 1 este perioadă a lui f.

Soluţie. (a) Inegalitatea rezultă din relaţiile de mai jos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{f(x-1+2)}{f(x-1+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f(x+2)}{f(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{f(x+1)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x+1)}\right)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 2\,\mathrm{d}x = 2.\end{aligned}$$

.... **4 puncte**

(b) Dacă 1 este perioadă a lui f, atunci $\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}x = 2$.
.... **1 punct**

Invers, dacă $\int_0^2 \frac{f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = 2$, atunci $\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{f(x+1)}{f(x)}} - \sqrt{\frac{f(x)}{f(x+1)}}\right)^2 \mathrm{d}x = 0$, iar din continuitatea lui f rezultă că $\sqrt{\frac{f(x+1)}{f(x)}} = \sqrt{\frac{f(x)}{f(x+1)}}$, $0 \leq x \leq 1$, deci $f(x+1) = f(x)$, oricare ar fi x în $[0,1]$. .... **1 punct**

Dacă $x \in [1,2]$, atunci $f(x) = f((x-1)+1) = f(x-1) = f((x-1)+2) = f(x+1)$, deci $f(x+1) = f(x)$, oricare ar fi x în $[0,2]$.

În fine, dacă x este un număr real oarecare, atunci $2n \leq x < 2n+2$, pentru un unic număr întreg n, şi $f(x) = f(x-2n) = f((x-2n)+1) = f((x+1)-2n) = f(x+1)$. Prin urmare, 1 este perioadă a funcţiei f.
.... **1 punct**

Problema 3. Fie p un număr prim impar şi fie G un grup care are exact $p+1$ elemente. Arătaţi că, dacă p divide numărul automorfismelor lui G, atunci $p \equiv 3 \pmod 4$.

Soluţie. Întrucât p este un divizor prim al $|\operatorname{Aut} G|$, există un f în $\operatorname{Aut} G$ de ordin p. Deoarece f este o permutare a mulţimii $G \setminus \{e\}$, rezultă că f este un ciclu de lungime p, deci $G \setminus \{e\} = \{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$, oricare ar fi x în $G \setminus \{e\}$. .... **3 puncte**

Pe de altă parte, $|G| = p+1$ este par, deci G are un element x_0 de ordin 2. Prin urmare, $\operatorname{ord} f^k(x_0) = 2$, $k = 0, \ldots, p-1$. Rezultă că $x^2 = e$, oricare ar fi x în G, deci $p+1 = 2^n$, unde $n \geq 2$ este un număr întreg. ..**3 puncte**

Deci $p = 2^n - 1 \equiv 3 \pmod 4$, deoarece $n \geq 2$. .... **1 punct**

Remarcă. Grupurile $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ şi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ îndeplinesc condiţia din enunţ.

Problema 4. Fie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ o funcţie crescătoare şi fie

$$a_n = \int_0^1 \frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Soluţie. În mod evident, $a_n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \int_0^1 \left(\frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}} - \frac{1 + (f(x))^{n+1}}{1 + (f(x))^{n+2}} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{(f(x))^n (1 - f(x))^2}{(1 + (f(x))^{n+1})(1 + (f(x))^{n+2})}\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

deci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător. Rezultă că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. .... **2 puncte**

Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Fie $a = \inf\{x\colon 0 \leq x \leq 1, f(x) = 1\}$.

Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = 1$, oricare ar fi x în $(0,1]$, deci $a_n = 1$, oricare ar fi indicele n, şi $\ell = 1$. .... **1 punct**

Dacă $a > 0$, fie $\epsilon \in (0, a)$. Atunci

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n - 1 &= \int_0^1 \left(\frac{1 + (f(x))^n}{1 + (f(x))^{n+1}} - 1 \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(f(x))^n (1 - f(x))}{1 + (f(x))^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 (f(x))^n (1 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^a (f(x))^n (1 - f(x))\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^a (f(x))^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{a-\epsilon} (f(x))^n\,\mathrm{d}x + \int_{a-\epsilon}^a (f(x))^n\,\mathrm{d}x \\ &\leq (a - \epsilon)(f(a - \epsilon))^n + \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Dar $(f(a-\epsilon))^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, deoarece $0 \leq f(a - \epsilon) < 1$, deci, prin trecere la limtă în relaţia de mai sus, $0 \leq \ell - 1 \leq \epsilon$, oricare ar fi ϵ în $(0, a)$. Prin urmare, $\ell = 1$. .... **4 puncte**