INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a X-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie $a,b,c\in(1,\infty)$, $t=\dfrac{a^2}{2b+c}+\dfrac{b^2}{2c+a}+\dfrac{c^2}{2a+b}$. Arătaţi că $\log_a t+\log_b t+\log_c t\ge 3$.

(Autor prof. Ilonţa Andrei, Colegiul Naţional „Silvania” Zalău)

Soluţie

Folosim inegalitatea $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{z^2}{\gamma}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta,\gamma>0$

Atunci obţinem $t\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{2b+c+2c+a+2a+b}\Rightarrow t\ge\dfrac{a+b+c}{3}\Rightarrow t\ge\sqrt[3]{abc}$ ………………... *2 puncte*

Deoarece $a\in(1,\infty)$, avem $\log_a t\ge\log_a\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\log_a t\ge\dfrac{1}{3}\log_a abc$ .... *2 puncte*

Analog se scriu inegalităţile pentru ceilalţi doi logaritmi şi prin sumare obţinem

$$S=\log_a t+\log_b t+\log_c t\ge\frac{1}{3}\left(\log_a abc+\log_b abc+\log_c abc\right)$$

$$S\ge\frac{1}{3}\left(3+\log_a b+\log_b a+\log_b c+\log_c b+\log_a c+\log_c a\right)$$ .... *2 puncte*

Aplicând inegalitatea $x+\dfrac{1}{x}\ge 2,\ \forall x>0$, obţinem $S\ge\dfrac{1}{3}(3+2+2+2)\Rightarrow S\ge 3$ .... *1 punct*

PROBLEMA 2

Arătaţi că $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{2}<\sqrt{2},\forall n\in N^*$.

(Selectată de prof. Opriş Adonia, Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian” Zalău)

Soluţie

Inegalitatea din enunţ devine $2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}<2^{\frac{1}{2}}$ .... *2 puncte*

Dar $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=$ .... *3 puncte*

$=\frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)}{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)<\frac{1}{2}$, de unde $2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}<2^{\frac{1}{2}}$ .... *2 puncte*

PROBLEMA 3

Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relaţia $(f\circ f)(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine f ştiind că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+f(x)$ este injectivă.

(Selectată de prof. Klara Alexuţan Colegiul Tehnic „Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)

Soluție

$f\circ f$ este injectivă, deci f este injectivă .... *2 puncte*

$x\to f(x)\Rightarrow g(f(x))=f(x)+f(f(x))=f(x)+x=g(x)$.................................... *3 puncte*

Din injectivitatea lui g rezultă $f(x)=x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ .... *2 puncte*

PROBLEMA 4

Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ şi numerele $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=1$ şi $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$.

a) Demonstraţi că $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+\ldots+|z-z_n|^2=n|z|^2+n,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că $|z-z_1|+|z-z_2|+\ldots+|z-z_n|\leq n\sqrt{2},\ \forall z\in\mathbb{C}$, $|z|\leq 1$.

(Gazeta Matematică)

Soluție

a) Deoarece $|z_k|=1$, avem $z_k\overline{z_k}=|z_k|^2=1$, pentru orice $k=\overline{1,n}$ .... *1 punct*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Atunci $\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(z-z_k)\overline{(z-z_k)}=\sum_{k=1}^{n}(z-z_k)(\overline{z}-\overline{z_k})=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(|z|^2-z\overline{z_k}-z_k\overline{z}+|z_k|^2\right)=n|z|^2+n-\sum_{k=1}^{n}\left(z\overline{z_k}+\overline{z}z_k\right)=$$

$$=n|z|^2+n-z\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}-\overline{z}\sum_{k=1}^{n}z_k$$ .... *2 puncte*

Din $\sum_{k=1}^{n}z_k=0\Rightarrow\overline{\sum_{k=1}^{n}z_k}=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}=0$, deci $\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=n|z|^2+n$ .... *1 punct*

b) Putem folosi $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\le n\sum_{k=1}^{n}x_k^2$, $x_k\in\mathbb{R}$, deoarece $|z-z_k|\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ .... *1 punct*

Astfel $\left(\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\right)^2\le n\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2\overset{a)}{\Rightarrow}\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\le\sqrt{n\left(n|z|^2+n\right)}=n\sqrt{|z|^2+1}$ .... *1 punct*

Atunci $\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\le n\sqrt{|z|^2+1}$ şi folosind $|z|\le 1$ obţinem $\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\le n\sqrt{2}$ .... *1 punct*