OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL I

Fie în $M_3(\mathbb{R})$ matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ si $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și pentru fiecare $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definim matricea $M_t=\frac{t}{3}A+\frac{1}{3t^2}B$.

(i) Să se arate că mulțimea de matrice $G=\{M_t \mid t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

(ii) Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to G, f(t)=M_t$ este un izomorfism de grupuri.

Soluție:

Verificăm că mulțimea G este parte stabilă,dacă t si u sunt reale nenule avem

$$M_tM_u=\left(\frac{t}{3}A+\frac{1}{3t^2}B\right)\left(\frac{u}{3}A+\frac{1}{3u^2}B\right)=\frac{tu}{9}A^2+\frac{u}{9t^2}BA+\frac{t}{9u^2}AB+$$
$$\frac{1}{9t^2u^2}B^2=\frac{tu}{3}A+\frac{1}{3t^2u^2}B=M_{tu}$$

Deoarece avem $A^2=3A, AB=BA=0, B^2=3B$. Rezultă parte stabilă.Din $M_t=M_u$ obtinem $t=u$ și cu aceasta deducem că $I_3=M_1$ este element neutru,iar simetricul lui M_t este $M_{\frac{1}{t}}$,deci G cu inmultirea este grup comutativ.

(5puncte)

Din partea stabilă deducem că f este morfism și demonstrăm injectivitatea și surjectivitatea.

(2puncte)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016

BAREM DE CORECTARE

CLASA A XII-A

SUBIECTUL II

Fie $(G,\cdot)$ şi $a,b\in G$ diferite cu proprietăţile $a\neq e, b\neq e, a^7=e, aba^{-1}=b^2$ unde e este elementul neutru al grupului G. Să se determine ordinele elementelor a şi b.

Soluţie:

Avem ordinul lui a egal cu 7.Folosind relaţiile $ab=b^2a, a=b^2ab^{-1}$ demonstrăm prin inducţie matematică $a^k=b^{2^k}a^kb^{-1}$ pentru orice k natural. Luăm k=7 şi obţinem (2 puncte)

$$b^{2^7-1}=e \Rightarrow b^{127}=e.$$

Deci ordinul lui b este127(număr prim). (5 puncte)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL III

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} k+\sin x\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ k & ,x=0\end{cases}$ şi $J_n=\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[n+\left(\frac{1}{n}-n\right)\chi(x)\right]\cdot f(x)\,dx$, unde

$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$. Determinați k astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} J_n=12$.

Soluţie:

Scriem $f(x)=k+\begin{cases}\sin x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}=k+g(x)$. Deoarece funcția g este impara avem **(2 puncte)**

$$J_n=\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[n+\left(\frac{1}{n}-n\right)\chi(x)\right]\cdot f(x)\,dx=\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[n+\left(\frac{1}{n}-n\right)\chi(x)\right](k+g(x))\,dx=$$

$$\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[n+\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[n+\left(\frac{1}{n}-n\right)\chi(x)\right]\right]kdx=knx\Big|_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}+\int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{1}{n}-n\right)\chi(x)\right]kdx=2k^2+$$

$$k\left(\frac{1}{n}-n\right)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}dx=2k^2-2k+\frac{2k}{n^2}.$$

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} J_n=2k^2-2k=12$ de unde se obține $k_1=3$ si $k_2=-2$. **(5 puncte)**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL IV

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $e^{f(x)}+f(x)\le x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Să se arate că $\int_1^{e+1} f(x)dx \le \frac{3}{2}$.

Soluţie:

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x+x$ bijectivă (2 puncte),

deci ipoteza se scrie $g(f(x))\le x \Leftrightarrow f(x)\le g^{-1}(x)$-argumentare (1 punct)

și prin integrare avem

$$\int_1^{e+1} f(x)dx \le \int_1^{e+1} g^{-1}(x)dx (1)$$

Dar identitateaYoung avem $\int_0^1 g(x)dx + \int_1^{e+1} g^{-1}(x)dx = e+1$ (2puncte).

Obtinem $\int_1^{e+1} g^{-1}(x)dx = \frac{3}{2}$(2). Din (1) și (2) se obține ce se cerea demonstrat. (2 puncte)