OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT
Etapa locală – 15 februarie 2015
CLASA A XII-A
Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.
a) $a, b \in Z(G) \Rightarrow ab \in Z(G)$ **1p**
$a \in Z(G) \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$ **1p**
b) Fie $a \in G$ arbitrar. Vom arăta că $ax = xa$, pentru orice $x \in G$.
Dacă $a \in Z(G)$ sau $x \in Z(G)$ afirmaţia este evidentă **1p**
Dacă $a, x \in G \setminus Z(G)$, atunci $a^2 = x^2 = e$. Avem două cazuri:
- dacă $ax \in Z(G)$, atunci $ax \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot ax$, deci $a = x^{-1}ax$, de unde $xa = ax$ **2p**
- dacă $ax \notin Z(G)$, atunci $(ax)^2 = e = a^2 \cdot x^2$, de unde $xa = ax$ **2p**

Problema 2.
Notând integrala din enunţ cu I, cu schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$, rezultă $I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ **3p**
Cum $\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$, $\cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$ şi $\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)$ **1p**
rezultă
$$I = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)' dt}{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2-2u-1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1-\sqrt{2}}{u-1+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\cdot\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \quad \textbf{3p}$$

Problema 3.
Deoarece legea $*$ este asociativă, rezultă că $(a*b)*a = a*(b*a)$, pentru orice $a, b \in M$ **3p**
Notând cu e elementul neutru, rezultă $(a*b)*a*e = e*a*(b*a)$ şi, folosind proprietatea de simplificare din ipoteză pentru $x = a$, rezultă $(a*b)*e = e*(b*a)$, de unde $a*b = b*a$, pentru orice $a, b \in M$ **4p**

Problema 4.
($\Leftarrow$) Dacă $f(a) \geq 0$, atunci $f(t) \geq f(a) \geq 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ **1p**
Prin urmare, pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, avem
$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \geq 0,$$
adică $F(x_1) \leq F(x_2)$ **2p**
($\Rightarrow$) Presupunem că $f(a) < 0$. Cum f este continuă în a şi $f(a) < \frac{f(a)}{2}$, există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(t) < \frac{f(a)}{2}$ pentru orice $t \in [a, c]$ **2p**
Obţinem $F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\, dt \leq (c-a)\cdot\frac{f(a)}{2} < 0$, contradicţie **2p**