Inspectoratul Școlar Județean Mehedinți

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

a)Numerele 2 şi 19 sunt termeni ai unei progresii aritmetice crescătoare de numere naturale. Să se calculeze rația progresiei.

b)Fie a,b,c numere întregi, cu $a^2-4b=c^2$. Să se arate că numărul a^2-2b se scrie ca sumă de două pătrate perfecte ale unor numere întregi.

SUBIECTUL II

Fie x,y,z$\in R^*$,astfel încât : $\begin{cases}[x+y]=y+z\\ [y+z]=z+x\\ [z+x]=x+y\end{cases}$,unde $[x]$este partea întreagă a numărului real x. Să se demonstreze că (x+y)(y+z)(z+x)=8xyz.

SUBIECTUL III

Fie a$\in R, n\in N, n\geq 2$.

a)Considerăm punctele $A_1(1,a), A_2(2,a),..., A_n(n,a)$în reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$.Să se calculeze $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$.

b) Să se demonstreze inegalitatea $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+2^2}+...+\sqrt{a^2+n^2}\geq\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot n(2a+n+1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic ,cu notațiile AB=c, AC=b, BC=a şi AD$\perp$BC, D$\in[BC]$.

a)Să se arate că $\frac{BD}{DC}=\frac{c\cos B}{b\cos C}$.

b)Dacă A' este un punct astfel ca $\overrightarrow{AA'}$=(b cos C) $\overrightarrow{AB}$+(c cosB) $\overrightarrow{AC}$,să se demonstreze că punctele A, D, A' sunt coliniare.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a IX-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

a)	$a_1+(p-1)\cdot r=2$; $a_1+(m-1)\cdot r=19$ $(m-p)\cdot r=17$ Cum $m>p$ resultă $m-p\in IN \Rightarrow r\in\{1,17\}$	2p 1p 1p
b)	$a^2-c^2=4b$ rezultă a şi c au aceeaşi paritate; $a\pm c$ pare $a^2-2b=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$	1p 2p

SUBIECTUL II

Din inegalitatea părții întregi $\Rightarrow [x+y]\le x+y; [y+z]\le y+z; [z+x]\le z+x$	3p
$\begin{cases} y+z\le x+y \\ z+x\le y+z \\ x+y\le z+x \end{cases}$	1p
$\Rightarrow x=y=z$	2p
$(x+y)(y+z)(z+x)=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz$	1p

SUBIECTUL III

a)	$\overrightarrow{OA_k}(k,a),\ k=\overline{1,n}$ $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\left(\sum_{k=1}^{n}k,\ na\right)\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\left(\frac{n(n+1)}{2},\ na\right)$	**1p** **2p**
b)	$\left\lvert\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k}\right\rvert\le\sum_{k=1}^{n}\left\lvert\overrightarrow{OA_k}\right\rvert$ $\frac{1}{2}n\sqrt{(n+1)^2+4a^2}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+a^2}$ Se verifica ca $\frac{1}{2}n\sqrt{(n+1)^2+4a^2}\ge\frac{\sqrt{2}}{4}n(2a+n+1)$ Finalizare	**1p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL IV

a)	Din $\Delta ABD\Rightarrow BD=c\cdot\cos B$ Din $\Delta ADC\Rightarrow CD=b\cdot\cos C$ Finalizare	**1p** **1p** **1p**
b)	Notăm $\frac{BD}{DC}=k$ $(k+1)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+k\cdot\overrightarrow{AC}$	**1p**

	$b \cdot \cos C \cdot (k+1)\overrightarrow{AD} = b \cdot \cos C \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \cos B \cdot \overrightarrow{AC}$ $b \cdot \cos C \cdot (k+1) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'}$ A, D, A' coliniare	**1p** **1p** **1p**