OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a XI-a

1. Şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ de numere reale sunt definite prin $x_0 = y_0 = 1$ şi

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

Să se arate că $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$ şi $y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0$, pentru orice $n \geq 0$. Să se demonstreze că ecuaţia $x^2 - 5y^2 = -4$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică 11/2014

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $\det(A + mI_n) = m^n \det\left(A + \frac{1}{m}I_n\right)$, pentru oricare $m \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n. Să se arate că $\det(A) = 1$.

Marin Marin

3. (a) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, unde ω este o rădăcină de ordinul 3 a unităţii, diferită de 1. Să se determine A^{2015}.

(b) Să se arate că ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu are soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dar admite soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Ioana Maşca

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, unde

$$a_n = \sqrt{2015^2x_1^2 + 2015x_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{2015^2x_2^2 + 2015x_2x_3 + x_3^2} + ... +$$
$$+ \sqrt{2015^2x_n^2 + 2015x_nx_1 + x_1^2}.$$

Florica Zubaşcu-Andreica

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Clasa a XI a

1. *Şirurile* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geqslant 0}$ *de numere reale sunt definite prin* $x_0 = y_0 = 1$ *şi*

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 0.$$

Să se arate că $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$ *şi* $y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0$*, pentru orice* $n \geqslant 0$*. Să se demonstreze că ecuaţia* $x^2 - 5y^2 = -4$ *are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.*

Soluţie.

Din relaţia matriceală din enunţ se obţin relaţiile de recurenţă

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x_{n+1} = 3x_n + 5y_n \\ (2) & 2y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{array}, \ n \in \mathbb{N}. \quad \mathbf{(1p)}$$

Din (2) rezultă $x_n = 2y_{n+1} - 3y_n$ şi $x_{n+1} = 2y_{n+2} - 3y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Înlocuind în (1), se obţine recurenţa $y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. **(2p)**

Similar, din (1) rezultă $y_n = 2/5 \cdot x_{n+1} - 3/5 \cdot x_n$ şi $y_{n+1} = 2/5 \cdot x_{n+2} - 3/5 \cdot x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Înlocuind în (2), se obţine $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. **(2p)**

Din (1) şi (2) şi ipoteza $x_0 = y_0 = 1$ rezultă (prin inducţie) că şirurile $(x_n)_{n\geqslant 0}$ şi $(y_n)_{n\geqslant 0}$ sunt strict pozitive şi strict crescătoare. În plus, din recurenţele demonstrate anterior se deduce (prin inducţie) că au termenii numere întregi. Deci $x_n, y_n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_n < x_{n+1}$, $y_n < y_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. **(1p)**

Din (1) şi (2) rezultă

$$x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = \left(\frac{3}{2}x_n + \frac{5}{2}y_n\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}y_n\right)^2 = x_n^2 - 5y_n^2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Cum $x_0^2 - 5y_0^2 = -4$, se verifică prin inducţie că $x_n^2 - 5y_n^2 = -4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Deci ecuaţia $x^2 - 5y^2 = -4$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi. **(1p)**

2. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, cu proprietatea* $\det(A + mI_n) = m^n \det\left(A + \frac{1}{m}I_n\right)$*, pentru oricare* $m \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$*, unde* I_n *este matricea unitate de ordinul* n*. Să se arate că* $\det(A) = 1$.

Soluţie.

Ipoteza se transcrie $\det(A + mI_n) = \det(mA + I_n)$, $\forall\, m \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$. **(2p)**

Considerăm funcţia $f(x) = \det(A + xI_n) - \det(xA + I_n)$, $x \in \mathbb{C}$. Conform definiţiei determinantului de ordinul n, deducem că funcţia f este polinomială, de grad cel mult n. **(2p)**

Dar, conform ipotezei, f admite $n+1$ rădăcini distincte. Rezultă că f este funcţia identic nulă. **(2p)**

Atunci $f(0) = 0$, de unde $\det(A) = \det(I_n) = 1$. **(1p)**

3.

(a) *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$*, unde* ω *este o rădăcină de ordinul* 3 *a unităţii, diferită de 1. Să se determine* A^{2015}.

(b) *Să se arate că ecuaţia matriceală* $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *nu are soluţii în mulţimea* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*, dar admite soluţii în mulţimea* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soluţie.

(a) Utilizând relaţiile $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, obţinem

$$A^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \text{ şi } A^4 = 9I_3. \quad \mathbf{(2p)}$$

Atunci

$$A^{2015} = \left(A^4\right)^{503} \cdot A^3 = \left(3^2 I_3\right)^{503} \cdot A^3 = 3^{1007} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1p)}$$

(b) Notăm $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $\det(J) = -1$. Dar $\det\left(X^2\right) = (\det(X))^2 \geqslant 0,\ \forall\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Rezultă că ecuaţia $X^2 = J$ nu are soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. **(1p)**
Fie $B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Avem $B^2 = (-B)^2 = J$, deci ecuaţia $X^2 = J$ admite soluţii în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. **(3p)**

4. *Se consideră şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, unde*

$$a_n = \sqrt{2015^2 x_1^2 + 2015 x_1 x_2 + x_2^2} + \sqrt{2015^2 x_2^2 + 2015 x_2 x_3 + x_3^2} + ... + \sqrt{2015^2 x_n^2 + 2015 x_n x_1 + x_1^2}.$$

Soluţie.
Cum $\sqrt{2015^2 x^2 + 2015 xy + y^2} \leqslant \sqrt{(2015x + y)^2} = 2015x + y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$. **(2p)**
Astfel, obţinem $0 \leqslant a_n \leqslant 2016(x_1 + ... + x_n)$, de unde $0 \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{2016(x_1+...+x_n)}{n}$. **(2p)**
Din $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2016(x_1+...+x_n)}{n} = 0$. **(2p)**
Conform criteriului cleşte, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. **(1p)**