OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a V-a

1. Într-o clasă sunt băieţi şi fete, astfel încât numărul băieţilor divide numărul fetelor. Florin împarte elevilor clasei, în mod egal, 1000 de bomboane. Ştiind că în clasă sunt cel puţin 10 băieţi, iar dacă ar mai veni încă 10 elevi, Florin ar putea, iarăşi, împărţi în mod egal elevilor cele 1000 de bomboane, aflaţi câte bomboane primeşte fiecare elev din clasă.

Romeo Ilie

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, considerăm numărul natural $S(n)$ definit prin

$$S(n) = \underbrace{\overline{1...1}}_{n \text{ ori}} + \underbrace{\overline{2...2}}_{n \text{ ori}} + ... + \underbrace{\overline{9...9}}_{n \text{ ori}} + 10^n.$$

a) Calculaţi $S(3)$.

b) Determinaţi restul împărţirii lui $S(n)$ la 3.

c) Notăm cu $Q(n)$ câtul împărţirii lui $S(n)$ la 3. Găsiţi câtul împărţirii sumei cifrelor lui $Q(n)$ la 9.

Emanuel Munteanu

3. a) Calculaţi $1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.

b) Arătaţi că numărul 2015^{2015} poate fi scris ca o sumă de 6 pătrate perfecte.

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii, noiembrie 2015

4. Aflaţi ultima cifră a numărului $A = 12^{12} + 22^{22} + 32^{32} + \cdots + (10 \cdot 2016 + 2)^{10 \cdot 2016 + 2}$.

Andrei Caţaron

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a V-a

1. Într-o clasă sunt băieţi şi fete, astfel încât numărul băieţilor divide numărul fetelor. Florin împarte elevilor clasei, în mod egal, 1000 de bomboane. Ştiind că în clasă sunt cel puţin 10 băieţi, iar dacă ar mai veni încă 10 elevi, Florin ar putea, iarăşi, împărţi în mod egal elevilor cele 1000 de bomboane, aflaţi câte bomboane primeşte fiecare elev din clasă.

Romeo Ilie

Soluţie.
Fie b numărul băieţilor, f numărul fetelor şi $n = b + f$ numărul elevilor clasei. Conform datelor problemei, $n|1000$. **(1p)**
Din $b|f$ şi $b \geq 10$ rezultă $n = b + f \geq 2b \geq 20$. **(1p)**
Ca urmare, $n \in \{20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000\}$. **(1p)**
Din $(n + 10)|1000$, rezultă $n = 40$. **(2p)**
Atunci fiecare elev primeşte $1000 : 40 = 25$ de bomboane. **(1p)**
Rămâne să arătam că situaţia indicată de problemă este posibilă. Astfel, din $b|f$ şi $b + f = n = 40$ deducem $b|40$. Cum $b \geq 10$, obţinem două variante posibile: a) $b = 10$ şi $f = 30$; b) $b = 20$ şi $f = 20$. **(1p)**

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, considerăm numărul natural $S(n)$ definit prin

$$S(n) = \underbrace{\overline{1...1}}_{n \text{ ori}} + \underbrace{\overline{2...2}}_{n \text{ ori}} + ... + \underbrace{\overline{9...9}}_{n \text{ ori}} + 10^n.$$

a) Calculaţi $S(3)$.

b) Determinaţi restul împărţirii lui $S(n)$ la 3.

c) Notăm cu $Q(n)$ câtul împărţirii lui $S(n)$ la 3. Găsiţi câtul împărţirii sumei cifrelor lui $Q(n)$ la 9.

Emanuel Munteanu

Soluţie.
a) $S(3) = 111 \cdot (1 + 2 + ... + 9) + 10^3 = 111 \cdot 45 + 1000 = 5995$. **(2p)**
b) Notăm $a = \underbrace{\overline{1...1}}_{n \text{ ori}}$. Avem $S(n) = a \cdot (1 + 2 + ... + 9) + 9a + 1 = 54a + 1 = 3 \cdot 18a + 1$.
Deci, restul împărţirii lui $S(n)$ la 3 este 1. **(3p)**
c) Din b), $Q(n) = 18a = 18 \cdot \underbrace{\overline{1...1}}_{n \text{ ori}} = \overline{1\underbrace{9...9}_{n-1 \text{ ori}}8}$. Suma cifrelor lui $Q(n)$ este atunci $9n$.
Deci câtul cerut este n. **(2p)**

3. a) Calculaţi $1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.

b) Arătaţi că numărul 2015^{2015} poate fi scris ca o sumă de 6 pătrate perfecte.

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii, noiembrie 2015

Soluţie.
a) $1 + 4 + 25 + 100 + 729 + 1156 = 2015$. **(2p)**
b)

$$\begin{aligned} 2015^{2015} &= 2015 \cdot 2015^{2014}. \text{ \textbf{(2p)}} \\ &= (1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2) \cdot (2015^2)^{1007} \text{ \textbf{(1p)}} \\ &= (1 \cdot 2015^{1007})^2 + (2 \cdot 2015^{1007})^2 + ... + (34 \cdot 2015^{1007})^2. \text{ \textbf{(2p)}} \end{aligned}$$

4. Aflaţi ultima cifră a numărului $A = 12^{12} + 22^{22} + 32^{32} + \cdots + (10 \cdot 2016 + 2)^{10 \cdot 2016+2}$.

Andrei Caţaron

Soluţie.
Termenii sumei A sunt de tipul $(10n + 2)^{10n+2}$, cu $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 2016\}$. **(1p)**
Notăm cu $u(a)$ ultima cifră a unui număr natural a reprezentat în baza 10.
Pentru $a, m \in \mathbb{N}^*$, astfel ca $u(a) = 2$, avem

$$u(a^m) = u(2^m) = \begin{cases} 6, \text{ dacă } m = 4k \\ 2, \text{ dacă } m = 4k + 1 \\ 4, \text{ dacă } m = 4k + 2 \\ 8, \text{ dacă } m = 4k + 3 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N}. \text{ \textbf{(2p)}}$$

Astfel,

$$u\left((10n + 2)^{10n+2}\right) = u\left(2^{2(5n+1)}\right) = \begin{cases} 6, \text{ dacă } n \text{ este impar} \\ 4, \text{ dacă } n \text{ este par} \end{cases}. \text{ \textbf{(2p)}}$$

Cum n ia 1008 valori pare şi 1008 valori impare, obţinem $u(A) = u(1008(6+4)) = 0$. **(2p)**