OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

CLASA A VIII-A

1.) **a.)** Descompuneţi în produs de doi factori numărul $x^4 + 4y^4$, $x, y \in \mathbb{N}^*$.

b.) Arătaţi că numărul $2^{118} + 13^4$ este număr compus.

2.) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 + 2y + 10}$, respectiv valorile lui *x* și *y* pentru care valoarea expresiei este egală cu minmul său.

3.) Se dau punctele ne coplanare *A, B, C, D* şi *M, N, P, Q* mijloacele segmentelor [*AC*], [*BM*], [*NC*], respective [*BP*]. Demonstraţi, că punctele *A, N, Q, D* se află în acelaşi plan şi $MP \parallel (AQD)$!

4.) Pătratul AEDC şi dreptunghiul AEFB sunt în plane diferite, iar dreptele DE şi AB sunt perpendiculare. Dacă CD=1 cm şi EF= $\sqrt{3}$ cm, calculaţi d(A,BD).

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

BAREM
CLASA A VIII-A

1.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$	**3p**
	Descompunerea $(x^2 + 2y^2 + 2xy)((x^2 + 2y^2 - 2xy)$	**2p**
b)	$(2^{59})^2 + (13^2)^2 + 2\cdot 2^{59}\cdot 13^2 - 2^{60}\cdot 13^2 = (2^{59} + 13^2)^2 - (2^{30}\cdot 13)^2$	**2p**
	Descompunerea $(2^{59} + 13^2 + 2^{30}\cdot 13)(2^{59} + 13^2 - 2^{30}\cdot 13)$. Deci, numărul dat este compus	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	$\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(y+1)^2+9}$	**4p**
	$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0$ de unde avem $(x-3)^2+4 \geq 4$ şi $\sqrt{(x-3)^2+4} \geq 2$ cu egalitate dacă $x=3$	**2p**
	$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow (y+1)^2 \geq 0$ de unde avem $(y+1)^2+9 \geq 9$ şi $\sqrt{(y+1)^2+9} \geq 3$ cu egalitate dacă $y=-1$	**2p**
	Valoarea minimă a expresiei este 5 și expresia are această valoare pentru $x=3$ și $y=-1$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	În triunghiul ANC , MP este linie mijlocie $\Rightarrow$MP || AN (1)	**3p**
	În triunghiul BMP , NQ este linie mijlocie$\Rightarrow$NQ || MP (2)	**3p**
	Din relaţiile (1), (2) rezultă, că punctele A, N, Q sunt coliniare şi (AQ, AD) = α, deci A, N, Q, D $\in$ α	**2p**
	Deoarece MP || AN şi AN $\subset$ α $\Rightarrow$MP || α, unde α = (AQD)	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	DE $\perp$ AB AB||EF $\Rightarrow$ DE $\perp$ EF	**1p**
	Calculează în Δ-ul FEB: EB=2 cm Calculează în Δ-ul DEB: DB=$\sqrt{5}$ cm	**1p** **2p**
	ΔDAB: DB=$\sqrt{5}$ cm, AD=$\sqrt{2}$ cm, AB=$\sqrt{3}$ cm$\Rightarrow$Δ-ul drepunghic în A Fie AM $\perp$ BD, deci d(A,BD)=AM=$\frac{AD\cdot AB}{BD}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$	**3p** **2p**