

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a XII-a

VARIANTA 2

1. Fie $a \in (1, \infty)$ și funcția $f: R \rightarrow R$ astfel încât $\ln(f^2(x) + 1) + af(x) = x, (\forall)x \in R$.
Sa se demonstreze că funcția f admite primitive.

Mihai Dragoș Totolici, R.M.T 1-2014

2. Pe mulțimea M se definește o operație notată multiplicativ cu proprietatea

$$x \cdot (y \cdot x) = y, \forall x, y \in M.$$

Să se demonstreze că fiecare din ecuațiile

$$a \cdot x = b$$

și

$$x \cdot a = b,$$

unde $a, b \in M$, are soluție unică.

R.M.T. 1-2014

3. Determinați funcția $f: R \rightarrow R$ ce satisface condițiile

- a) f este derivabilă cu derivata continuă;
- b) $f(0) = 2013$;
- c) $f'(x) - f(x) = e^x \cos x$, oricare ar fi numărul real x .

Teodor Trișcă și Daniela Vicol, Botoșani, Supliment G.M

4. Câte elemente are grupul multiplicativ al matricelor de ordin 2 cu elemente în clasele de resturi modulo 3? Dar subgrupul matricelor ce au determinantul 1 modulo 3?

Suplimentul cu exerciții G.M.1/2014

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Barem corectare și notare clasa a XII – a

1. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \ln(t^2 + 1) + at$, $t \in \mathbb{R}$ (1p)
Studiază monotonia ei și arată că g este strict crescătoare (2p)
Deduce că g este bijectivă, deoarece $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$, (2p)
Deoarece $g(f(x)) = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $f = g^{(-1)}$ este bijecție crescătoare, deci continuă, admitând primitive (2p)
2. a) Studiază ecuația $ax = b$, deducând $a = x(ax) = xb$ (1p)
Obține $ba = b(xb) = x$ 1p
Deduce unica soluție $x = ba$ (1p), verificând – o (1p)
b) Porneste de la $xa = b$ obținând $x = a(xa) = ab$ (2p)
Verifică că $x = ab$ este soluție. (1p)
3. Deduce că $(e^x \cdot \sin x)' = e^x \cdot (\sin x)' + (e^x)' \cdot \sin x = e^x \cdot \cos x + e^x \sin x$ (1p).
Deduce și că $(e^x \cdot \sin x)' - (e^x \cdot \sin x) = e^x \cos x$ (2p)
Deduce că primitiva calculată trebuie să aibă forma $e^x \cdot \sin x + k \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (1p)
Din condiția de etalonare, deduce că $k = 2013$. (2p)
Obține primitiva ca fiind $f(x) = e^x \sin x + 2013 e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (1p)
4. a) Numără cele 81 de matrici (2p)
b) Determină numărul matricilor care nu sunt inversabile (2p)
Le pune în bijecție pe cele de determinant 1 cu cele de determinant 2 (fiecare reprezentant al clasei respective) (2p)
Obține cele 24 = 48:2 matrice de determinant 1 (1p)
Observație: Sau le listează pe toate (5p)