OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A VIII-A, SUBIECTE

1. Dacă $m, a, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 1, m \neq -1$ și $|ma+b| = |a+mb|$, arătați că $|a| = |b|$.

***

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele M şi P mijloacele muchiilor $[D'C']$ şi $[BC]$. Dacă $AC \cap BD = \{O_1\}$, $AD' \cap A'D = \{O_2\}$ şi punctele S, T mijloacele segmentelor $[O_1M]$, $[PO_2]$, atunci determinaţi măsura unghiului dintre dreptele ST şi $B'C'$.

Nicolae Stănică, Brăila

3. Fie tetraedrul $ABCD$, punctele K, L, M, N mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CD]$, $[AK]$ și respectiv $[AL]$, iar punctul P este intersecția dreptelor BL și DK. Demonstrați că dreapta de intersecție a planelor (BMP) și (DNP) este paralelă cu planul (ABD).

Marius Damian, Brăila

4. Un număr natural $n = \overline{abcd}$ este pătrat perfect. Mărim cifra miilor cu 3, a sutelor cu 1, pe cea a zecilor o micşorăm cu 2, iar pe cea a unităţilor o păstrăm neschimbată şi obţinem astfel un alt pătrat perfect. Determinaţi numărul natural n.

Carmen şi Viorel Botea, G.M.

***Notă*: 1. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**
2. Listele cu elevii calificaţi la etapa judeţeană şi baremele vor fi afişate la avizierul unităţilor şcolare şi pe site-ul matematicabr.weebly.com.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 21 FEBRUARIE 2016

CLASA A VIII-A, SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

1. Dacă $m,\ a,\ b \in \mathbb{R},\ m \neq 1, m \neq -1$ și $|ma+b| = |a+mb|$, arătați că $|a| = |b|$.

***

Soluţia 1.

Prin ridicare la pătrat, din egalitatea $|ma+b| = |a+mb|$ obținem $(ma+b)^2 = (a+mb)^2$ 3p

$(m^2-1)a^2 = (m^2-1)b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|$ 4p

Soluţia 2.

$|ma+b| = |a+mb| \Rightarrow ma+b = a+mb$ sau $ma+b = -(a+mb)$ 3p

$ma+b = a+mb \Rightarrow (a-b)(m-1) = 0 \Rightarrow a = b$ 2p

$ma+b = -(a+mb) \Rightarrow (a+b)(m+1) = 0 \Rightarrow a = -b$ 2p

2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele M şi P mijloacele muchiilor $[D'C']$ şi $[BC]$. Dacă $AC \cap BD = \{O_1\}$, $AD' \cap A'D = \{O_2\}$ şi punctele S, T mijloacele segmentelor $[O_1M]$, $[PO_2]$, atunci determinaţi măsura unghiului dintre dreptele ST şi $B'C'$.

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie.

$D'MPO_1$ paralelogram $\Rightarrow D', S, P$ coliniare şi $D'S = SP$ 3p

Din $D'S = SP$ şi $O_2T = TP \Rightarrow (ST)$ linie mijlocie în $\Delta D'O_2P \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow ST \parallel D'O_2 \Rightarrow m(\sphericalangle ST, B'C') = m(\sphericalangle D'O_2, A'D') = 45^\circ$ 2p

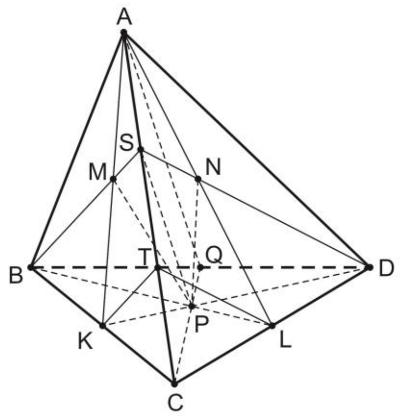
3. Fie tetraedrul $ABCD$, punctele K, L, M, N mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CD]$, $[AK]$ și respectiv $[AL]$, iar punctul P este intersecția dreptelor BL și DK. Demonstrați că dreapta de intersecție a planelor (BMP) și (DNP) este paralelă cu planul (ABD).

Marius Damian, Brăila

Soluţie.

Fie $\{S\} = BM \cap AC$, $\{Q\} = CP \cap BD$ și T mijlocul segmentului $[SC]$.

P este centrul de greutate al triunghiului BCD, deci $\frac{PQ}{PC} = \frac{1}{2}$ ……………………..………1p



$[TK]$ linie mijlocie în $\triangle CSB$, $TK \parallel SB \Rightarrow SM \parallel TK$ și M mijlocul lui $[AK] \Rightarrow [SM]$ linie mijlocie în $\triangle ATK$. În consecință, S mijlocul lui $[AT]$, deci $AS = ST = TC \Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{1}{2}$ .. 2p

Din $AS = ST$ și $AN = NL$ $\Rightarrow [SN]$ linie mijlocie în $\triangle ATL$, deci $SN \parallel TL$. Simultan, din $ST = TC$ și $DL = LC$ $\Rightarrow [TL]$ linie mijlocie în $\triangle CSD$, deci $SD \parallel TL$. Dar în planul (ACD) paralela dusă prin punctul S la dreapta TL este unică, lucru care spune că punctele S, N, D sunt coliniare. S și P sunt puncte comune planelor distincte (BMP) și (DNP), deci $(BMP) \cap (DNP) = SP$ ……………………………………………..…..…………….2p

În plus, $\frac{PQ}{PC} = \frac{SA}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow SP \parallel AQ \Rightarrow SP \parallel (ABD)$ …………………………………….…….……....2p

4. Un număr natural $n=\overline{abcd}$ este pătrat perfect. Mărim cifra miilor cu 3, a sutelor cu 1, pe cea a zecilor o micşorăm cu 2, iar pe cea a unităţilor o păstrăm neschimbată şi obţinem astfel un alt pătrat perfect. Determinaţi numărul natural *n*.

Carmen şi Viorel Botea, G.M.

Soluţie.

$\overline{(a+3)(b+1)(c-2)d}=k^2, \quad \overline{abcd}=x^2$ ……………………………………………………….1p

$\overline{(a+3)(b+1)(c-2)d}-\overline{abcd}=k^2-x^2=(k-x)(k+x)=3080$ ……………………..…..3p

$1.\begin{cases} k-x=14 \\ k+x=220 \Rightarrow x=103 \text{ fals} \end{cases}$

$2.\begin{cases} k-x=20 \\ k+x=154 \Rightarrow x=67 \Rightarrow n=4489 \end{cases}$

$3.\begin{cases} k-x=22 \\ k+x=140 \Rightarrow x=59 \Rightarrow n=3481 \end{cases}$

…………………………………………………………2p

$4.\begin{cases} k-x=10 \\ k+x=308 \Rightarrow x=149 \text{ fals} \end{cases}$

$5.\begin{cases} k-x=28 \\ k+x=110 \Rightarrow x=41 \Rightarrow n=1681 \end{cases}$

$6.\begin{cases} k-x=44 \\ k+x=70 \Rightarrow x=13 \text{ fals} \end{cases}$

deci $\overline{abcd}\in\{1681, 3481, 4489\}$ ……………..……………………………………………1p