Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015
Clasa a IX-a

Problema 1.

Şirul de numere reale verifică relaţiile: $x_1 = 2,\ x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{x_n \cdot (n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Să se determine x_n.

Problema 2.

Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\left[\frac{1}{1-x}\right] + \left[\frac{4-x}{3\cdot(1-x)}\right] + \left[\frac{5-2\cdot x}{3\cdot(1-x)}\right] = \frac{3}{1-[x]}.$$

Problema 3.

Fie $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ numere reale strict pozitive, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Să se demonstreze că:

$$\frac{n\cdot a_1 + 4}{n^2 \cdot (a_2 + a_3 + ... + a_n)} + \frac{n\cdot a_2 + 4}{n^2 \cdot (a_1 + a_3 + ... + a_n)} + \frac{n\cdot a_3 + 4}{n^2 \cdot (a_1 + a_2 + a_4 + ... + a_n)} + ...$$

$$... + \frac{n\cdot a_n + 4}{n^2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1})} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + 4}{(n-1)\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)}.$$

Problema 4.

Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P, Q cu proprietăţile

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{BP} = 3\cdot\overrightarrow{BN}$, iar $CM \cap AP = \{Q\}$.

Să se determine valoarea raportului $\frac{CQ}{CM}$.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie-2015

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
	Pentru n=2, se obţine $x_1+x_2=\frac{4}{3}\cdot x_2 \Rightarrow x_2=6=2\cdot 3$; $x_1+x_2+x_3=\frac{5}{3}\cdot x_3 \Rightarrow x_3=3\cdot 4$ Atunci, presupunem că $x_n=n\cdot(n+1), \forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p** **2p** **1p**
1.	Demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia P(n): $x_n=n\cdot(n+1), \forall n\in\mathbb{N}^*$: 1. P(1): $x_1=1\cdot 2=2 \quad (A)$. 2 .Presupunem că P(n) este adevărată şi să demonstrăm că P(n+1) este adevărată. P(n+1): $x_{n+1}=(n+1)\cdot(n+2)$. Dar $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)+x_{n+1}=\frac{x_{n+1}\cdot(n+3)}{3}\Rightarrow$ $\frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{3}+x_{n+1}=\frac{x_{n+1}\cdot(n+3)}{3}\Rightarrow$ $x_{n+1}=(n+1)\cdot(n+2)$ (A) $\Rightarrow$ P(n)este adevărată, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Aşadar, $x_n=n\cdot(n+1),(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.	**1p** **1p**

Metoda 2.

Deoarece egalitatea $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{x_n \cdot (n+2)}{3}$ (1) este adevărată

pentru orice număr natural nenul n, rezultă

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = \frac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \qquad (2)$$

Din (1)și $(2) \overset{-}{\Rightarrow} \dfrac{x_n \cdot (n+2)}{3} + x_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} \cdot (n+3)}{3} \Rightarrow$

$$x_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{1}; \frac{x_3}{x_2} = \frac{4}{2}; \frac{x_4}{x_3} = \frac{5}{3}; \ldots, \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} \Rightarrow x_n = n \cdot (n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2.

Pentru definirea părții întregi a unui numărului real x **2p**

Scrierea identității lui Hermite **1p**

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]+\left[\frac{4-x}{3\cdot(1-x)}\right]+\left[\frac{5-2\cdot x}{3\cdot(1-x)}\right]=\frac{3}{1-[x]}\Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{2}{3}\right]=\frac{3}{1-[x]};$$ **1p**

Aplicând identitatea lui Hermite $\Rightarrow$

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{2}{3}\right]\overset{Hermite}{=}\left[\frac{3}{1-x}\right]$$

Dar 1-$[x]=-([x]-1)=-[x-1]$;

Ecuaţia devine:

$$\left[\frac{3}{1-x}\right]=-\frac{3}{[x-1]}\Leftrightarrow\left[\frac{3}{1-x}\right]\cdot[x-1]=-3;$$

1p

$$\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]\cdot[x-1]=-3\\ \left[\frac{3}{1-x}\right]\in\mathbb{Z}\\ [x-1]\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=1\\ [x-1]=-3\end{cases} sau \begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-1\\ [x-1]=3\end{cases} sau \begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=3\\ [x-1]=-1\end{cases} sau \begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-3\\ [x-1]=1\end{cases};$$

1. $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=1\\ [x-1]=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le\frac{3}{1-x}<2\\ -3\le x-1<-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right)\\ x\in[-2,-1)\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,-1);$

2. $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-1\\ [x-1]=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le\frac{3}{1-x}<0\\ 3\le x-1<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[4,\infty)\\ x\in[4;5)\end{cases}\Rightarrow x\in[4;5)$;

1p

3. $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=3\\ [x-1]=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le\frac{3}{1-x}<4\\ -1\le x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\\ x\in[0,1)\end{cases}\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$;

4. $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-3\\ [x-1]=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le\frac{3}{1-x}<-2\\ 1\le x-1<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[2,\frac{5}{2}\right)\\ x\in[2,3)\end{cases}\Rightarrow x\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$

Mulţimea soluţiilor este S=$[-2,-1)\cup\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[2,\frac{5}{2}\right)\cup[4;5)$ **1p**

	Notăm $S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Inegalitatea din enunţ devine: $\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{a_1}{S-a_1}+\dfrac{a_2}{S-a_2}+\dfrac{a_3}{S-a_3}+\ldots+\dfrac{a_n}{S-a_n}\right)+$ $+\dfrac{4}{n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{S-a_1}+\dfrac{1}{S-a_2}+\dfrac{1}{S-a_3}+\ldots+\dfrac{1}{S-a_n}\right)\geq\dfrac{S+4}{(n-1)\cdot S}$	**1p**
	Scrierea inegalităţii lui Titu Andreescu Conform inegalităţii lui Titu Andreescu: $\dfrac{4}{n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{S-a_1}+\dfrac{1}{S-a_2}+\dfrac{1}{S-a_3}+\ldots+\dfrac{1}{S-a_n}\right)\geq\dfrac{4}{n^2}\cdot\dfrac{(1+1+1+..+1)^2}{n\cdot S-S}=$ $=\dfrac{4}{S\cdot(n-1)}$ (1)	**1p** **1p**
3.	$\dfrac{a_1}{S-a_1}+\dfrac{a_2}{S-a_2}+\dfrac{a_3}{S-a_3}+\ldots+\dfrac{a_n}{S-a_n}=$ $=\dfrac{a_1^{\ 2}}{S\cdot a_1-a_1^{\ 2}}+\dfrac{a_2^{\ 2}}{S\cdot a_2-a_2^{\ 2}}+\dfrac{a_3^{\ 2}}{S\cdot a_3-a_3^{\ 2}}+\ldots+\dfrac{a_n^{\ 2}}{S\cdot a_n-a_n^{\ 2}}\geq$ $\dfrac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{S^2-\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}\right)}=$ $=\dfrac{S^2}{S^2-\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}\right)}$. Înmulţim relaţia cu $\dfrac{1}{n}$**,** obţinem**:**	**2p**

<table>
<tr><td></td><td>

$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\frac{a_3}{S-a_3}+...+\frac{a_n}{S-a_n}\right)\ge$

$\ge\frac{S^2}{n\cdot S^2-n\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)}(2)$

$Dar\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)^2\le n\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)(CBS)\Rightarrow$

$-n\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)\le-\left(a_1+a_2+a_3+...+a_n\right)^2=-S^2\Rightarrow$

$n\cdot S^2-n\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)\le n\cdot S^2-S^2=\left(n-1\right)\cdot S^2\Rightarrow$

$\frac{S^2}{n\cdot S^2-n\cdot\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)}\ge\frac{S^2}{\left(n-1\right)\cdot S^2}=\frac{1}{n-1}(3)$

Din (2) şi (3) $\Rightarrow\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\frac{a_3}{S-a_3}+...+\frac{a_n}{S-a_n}\right)\ge\frac{1}{n-1}(4)$

Prin adunarea inegalităţilor (1) şi (4), rezultă inegalitatea cerută

</td><td>

1p

1p

</td></tr>
<tr><td>

4.

</td><td>

Notăm $\frac{CQ}{CM}=k\Rightarrow\overrightarrow{CQ}=k\cdot\overrightarrow{CM};$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{AC}-2\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\cdot\overrightarrow{AC};$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{MQ}{CM}\cdot\overrightarrow{CM};$

$\frac{CQ}{CM}=k\Rightarrow\frac{CM+MQ}{CM}=k\Rightarrow\frac{MQ}{CM}=k-1;$

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB};$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\left(k-1\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{k}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\left(k-1\right)\cdot\overrightarrow{AC};$

Definirea coliniarităţii a doi vectori

Vectorii $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ sunt coliniari $\Rightarrow\frac{-2}{\frac{k}{3}}=\frac{\frac{6}{5}}{-\left(k-1\right)}\Rightarrow k=\frac{5}{4}.$

</td><td>

1p

2p

2p

1p

1p

</td></tr>
</table>