

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Arătați că $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{7^2}} + \dots + \sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq 2014$.

b) Fie (3p) $x = \sqrt{\left[\frac{7}{6} + \frac{8}{12} + \frac{9}{18} + \dots + \frac{506}{3000} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{500} \right) \right]} \cdot 6$. Arătați că $x \notin \mathbb{Q}$.

2. a) (4p) Arătați că, dacă $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$, unde $b_1, b_2, b_3 > 0$, atunci $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < \frac{a_3}{b_3}$.

b) (3p) Câte numere de forma $\frac{\sqrt{abab}}{ab}$ verifică relația $2 < \frac{\sqrt{abab}}{ab} < 3$?

3. Fie triunghiul PQN și M un punct oarecare pe latura $[PN]$ astfel încât $\frac{MN}{MP} = \frac{m}{n}$. Bisectoarea unghiului QMN intersectează latura $[NQ]$ în punctul C , bisectoarea unghiului QMP intersectează latura $[PQ]$ în punctul D , $MC \cap PQ = \{A\}$ și $MD \cap NQ = \{B\}$.

a) (2p) Arătați că $\frac{BN}{BQ} : \frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$;

b) (5p) Aflați poziția punctului M pe latura $[PN]$ astfel încât CD să fie paralelă cu NP ; apoi arătați că în acest caz patrulaterul $ABCD$ este trapez.

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O intersecția diagonalelor sale. O dreaptă variabilă ce trece prin punctul O intersectează laturile (AB) și (CD) în punctele M și respectiv N . Să se arate că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \text{constant}$.

- Notă:**
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
 2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
 3. Timp de lucru 3 ore.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Arătați că $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{7^2}} + \dots + \sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq 2014$.

Prof. Sascău Gabriela

b) (3p) Fie $x = \sqrt{\left[\frac{7}{6} + \frac{8}{12} + \frac{9}{18} + \dots + \frac{506}{3000} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{500} \right) \right]} \cdot 6$. Arătați că $x \notin \mathbb{Q}$.

Prof. Stratulat Ana

Soluție: a) Folosind inegalitatea mediilor avem: $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} \leq \frac{1+2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} \leq \frac{1}{2}$, ..., $\sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq \frac{1}{2}$.

Adunând inegalitățile obținem $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{7^2}} + \dots + \sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq 4028 \cdot \frac{1}{2} = 2014$.

b) $x = \sqrt{\frac{7}{1} + \frac{8}{2} + \frac{9}{3} + \dots + \frac{506}{500} - \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \dots + \frac{6}{500} \right)} = \sqrt{7 + \left(\frac{8}{2} - \frac{6}{2} \right) + \left(\frac{9}{3} - \frac{6}{3} \right) + \dots + \left(\frac{506}{500} - \frac{6}{500} \right)}$
 $x = \sqrt{7 + \underbrace{1+1+\dots+1}_{499}} = \sqrt{506} = \sqrt{2 \cdot 11 \cdot 23} \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$.

Barem:

a) $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} = \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} \leq \frac{1+2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} \leq \frac{1}{2}$, ..., $\sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq \frac{1}{2}$	2 p
Adunând inegalitățile obținem $\sqrt{\frac{1 \cdot 2}{3^2}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{5^2}} + \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{7^2}} + \dots + \sqrt{\frac{4028 \cdot 4029}{8057^2}} \leq 4028 \cdot \frac{1}{2} = 2014$	2 p
b) $x = \sqrt{\frac{7}{1} + \frac{8}{2} + \frac{9}{3} + \dots + \frac{506}{500} - \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} + \dots + \frac{6}{500} \right)} = \sqrt{7 + \left(\frac{8}{2} - \frac{6}{2} \right) + \left(\frac{9}{3} - \frac{6}{3} \right) + \dots + \left(\frac{506}{500} - \frac{6}{500} \right)}$	1 p
$x = \sqrt{7 + \underbrace{1+1+\dots+1}_{499}} = \sqrt{506}$	1 p
Finalizare.	1 p

2. a) (4p) Arătați că, dacă $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3}$, unde $b_1, b_2, b_3 > 0$, atunci $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < \frac{a_3}{b_3}$.

Prof. Șlincu Gabriela

b) (3p) Câte numere de forma $\frac{\sqrt{abab}}{ab}$ verifică relația $2 < \frac{\sqrt{abab}}{ab} < 3$?

Soluție: a) Notăm: $\frac{a_1}{b_1} = k$; $\frac{a_3}{b_3} = h \Rightarrow k < h \Rightarrow a_1 = kb_1 < hb_1$ (1). Putem scrie $k < \frac{a_2}{b_2} < h \Rightarrow kb_2 < a_2 < hb_2$ (2) și

$k < \frac{a_3}{b_3} = h \Rightarrow kb_3 < a_3 = hb_3$ (3). Adunând membru cu membru $\Rightarrow k(b_1 + b_2 + b_3) < a_1 + a_2 + a_3 < h(b_1 + b_2 + b_3)$.

Împărțind peste tot cu $b_1 + b_2 + b_3 > 0$, rezultă: $k < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < h \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < \frac{a_3}{b_3}$.

b) Relația $2 < \frac{\sqrt{abab}}{ab} < 3$ este echivalentă cu $2 < \sqrt{\frac{abab}{a^2 b^2}} < 3 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{\frac{101}{ab}} < 3 \Leftrightarrow 4 < \frac{101}{ab} < 9$, de unde rezultă că

$\frac{101}{9} < \overline{ab} < \frac{101}{4}$ adică $11 < \overline{ab} \leq 25$, deci sunt 14 numere.

Barem:

a) $\frac{a_1}{b_1} = k; \frac{a_3}{b_3} = h \Rightarrow k < h \Rightarrow a_1 = kb_1 < hb_1$ (1)	1 p
$k < \frac{a_2}{b_2} < h \Rightarrow kb_2 < a_2 < hb_2$ (2) și $k < \frac{a_3}{b_3} = h \Rightarrow kb_3 < a_3 = hb_3$ (3).	1 p
Adunând membru cu membru, obținem: $k(b_1 + b_2 + b_3) < a_1 + a_2 + a_3 < h(b_1 + b_2 + b_3)$	1 p
Împărțind peste tot cu $b_1 + b_2 + b_3 > 0$, rezultă: $k < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < h \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} < \frac{a_3}{b_3}$.	1 p
b) $2 < \sqrt{\frac{abab}{ab^2}} < 3 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{\frac{101}{ab}} < 3 \Leftrightarrow 4 < \frac{101}{ab} < 9$	1 p
De unde $\frac{101}{9} < \overline{ab} < \frac{101}{4}$ adică $11 < \overline{ab} \leq 25$,	1 p
deci sunt 14 numere.	1 p

3. Fie triunghiul PQN și M un punct oarecare pe latura $[PN]$ astfel încât $\frac{MN}{MP} = \frac{m}{n}$. Bisectoarea unghiului QMN intersectează latura $[NQ]$ în punctul C , bisectoarea unghiului QMP intersectează latura $[PQ]$ în punctul D , $MC \cap PQ = \{A\}$ și $MD \cap NQ = \{B\}$.

a) (2p) Arătați că $\frac{BN}{BQ} : \frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$;

b) (5p) Aflați poziția punctului M pe latura $[PN]$ astfel încât CD să fie paralelă cu NP ; apoi arătați că în acest caz patrulaterul $ABCD$ este trapez.

Prof. Alexandru Elena-Marcela

Soluție: a) În triunghiurile MQN și PMQ , aplicând teorema bisectoarei exterioare $\Rightarrow \frac{BN}{BQ} = \frac{MN}{MQ}; \frac{AP}{AQ} = \frac{MP}{MQ}$ (1)

$$\Rightarrow \frac{BN}{BQ} : \frac{AP}{AQ} = \frac{MN}{MQ} : \frac{MP}{MQ} = \frac{MN}{MQ} \cdot \frac{MQ}{MP} = \frac{MN}{MP} = \frac{m}{n};$$

b) $CD \parallel NP \Rightarrow \frac{QD}{DP} = \frac{QC}{CN}$ (2) și aplicând teorema bisectoarei interioare în triunghiurile PMQ și MQN avem $\frac{QD}{DP} = \frac{MQ}{MP}$ și $\frac{QC}{CN} = \frac{MQ}{MN}$, ținând cont de relația (2) rezultă $MP = MN$ adică M este mijlocul lui $[NP]$. Din (1), cum $MP = MN$ rezultă $\frac{BN}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $AB \parallel NP$, dar $CD \parallel NP$, rezultă $AB \parallel CD$, deci $ABCD$ trapez.

Barem:

a) În triunghiurile MQN și PMQ , aplicând teor. bisectoarei ext. $\Rightarrow \frac{BN}{BQ} = \frac{MN}{MQ}; \frac{AP}{AQ} = \frac{MP}{MQ}$ (1)	1 p
$\Rightarrow \frac{BN}{BQ} : \frac{AP}{AQ} = \frac{MN}{MQ} : \frac{MP}{MQ} = \frac{MN}{MQ} \cdot \frac{MQ}{MP} = \frac{MN}{MP} = \frac{m}{n}$;	1 p
b) $CD \parallel NP \Rightarrow \frac{QD}{DP} = \frac{QC}{CN}$ (2)	1 p
$\frac{QD}{DP} = \frac{MQ}{MP}$ și $\frac{QC}{CN} = \frac{MQ}{MN}$ ținând cont de relația (2) rezultă $MP = MN$	2 p
Din (1), cum $MP = MN$ rezultă $\frac{BN}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $AB \parallel NP$, dar $CD \parallel NP$, rezultă $AB \parallel CD$, deci $ABCD$ trapez.	2 p

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O intersecția diagonalelor sale. O dreaptă variabilă ce trece prin punctul O intersectează laturile (AB) și (CD) în punctele M și respectiv N . Să se arate că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \text{constant}$.

Soluție: Fie $CP \parallel MN; AQ \parallel MN; P, Q \in BD$. În $\triangle ABQ \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{MA}{MB} = \frac{OQ}{OB}$, în $\triangle CPD \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{ND}{NC} = \frac{OD}{OP}$, de unde $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OQ}{OP} \cdot \frac{OD}{OB}$ (1). În $\triangle AOQ \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OC}$ (2). Din (1), (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$, care nu depinde de pozițiile punctelor M, N în care dreapta variabilă ce trece prin punctul O intersectează laturile (AB) și (CD) .

Barem:

Fie $CP \parallel MN; AQ \parallel MN; P, Q \in BD$	1 p
În $\triangle ABQ \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{MA}{MB} = \frac{OQ}{OB}$, în $\triangle CPD \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{ND}{NC} = \frac{OD}{OP}$,	2 p
de unde $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OQ}{OP} \cdot \frac{OD}{OB}$ (1)	1 p
În $\triangle AOQ \xrightarrow{\text{Thales}} \frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OC}$ (2)	1 p
Din (1), (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$	1 p
Finalizare	1 p