

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

CLASA A IX-A

- 1.) Dacă $x \in [-3, 1]$ și $x - 2y + 3 = 0$, calculați partea întreagă a expresiei

$$K = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

- 2.) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ și relația $\frac{2n}{a_n} = \frac{n+1}{a_{n+1}} + \frac{n-1}{a_{n-1}}$ unde $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{3}{7}$.

- a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{n}{a_n}$ este o progresie aritmetică și determinați rația

progresiei, respectiv formula termenului general.

- b) Determinați subșirul $(y_k)_{k \geq 0}$ al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, care are termenii numere întregi.

- 3.) a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

Calculați suma: $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{5}{2}\right) + \dots + f\left(-\frac{2015}{2}\right)$.

- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+5}{3}}\right] = \frac{x+2}{3}$, unde cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

- 4.) În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in [BC]$, $N \in [AC]$, $P \in [AB]$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}. \text{ Arătați că:}$$

- a) cu segmentele AM , BN , CP se poate construi un triunghi.

- b) Pentru orice punct O din planul triunghiului ABC are loc relația:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

- c) centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și MNP coincid.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timpe de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016
BAREM
CLASA A IX-A

1.)	Din oficiu	1p
	$x \in [-3,1] \Rightarrow 0 \leq x+3 \leq 4 \Rightarrow x+3 = x+3, -4 \leq x-1 \leq 0 \Rightarrow x-1 = -x+1$	2p
	$x \in [-3,1]$ și $x-2y+3=0 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \in [0,2]$	1p
	$K = \sqrt{x^2+6x+9+y^2} + \sqrt{x^2-2x+1+y^2-4y+4}$	1p
	$K = \sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{x+3}{2}\right)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$	1p
	$\Rightarrow K = x+3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + x-1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} (x+3 + x-1)$	2p
	$\Rightarrow K = \frac{\sqrt{5}}{2} (x+3 - x+1) = 2\sqrt{5}$	1p
	$\Rightarrow [K] = [2\sqrt{5}] = 4$	1p
2.)	Din oficiu	1p
	a) $\frac{2n}{a_n} = \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n+1}{a_{n+1}} \Rightarrow \frac{n}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică	2p
	Rația progresiei este $r = x_2 - x_1 = \frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3}$	1,5p
	$x_n = x_1 + (n-1)r = 3 + (n-1)\frac{5}{3} = \frac{5n+4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	1,5p
	b) $x_n = \frac{5n+4}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x_n = 2n+1 - \frac{n-1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n-1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-1 = 3k, k \in \mathbb{N}$ de unde obținem $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$	3p
	Subșirul cu termenii numere întregi este: $(y_k)_{k \geq 0}, y_k = x_{3k+1} = 5k+3, k \in \mathbb{N}$	1p
3.)	Din oficiu	1p
	a) $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ unde $\{x\} \in [0,1)$ și $\{x+n\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$	1p
	$-\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} = -2 + \frac{1}{2}, \dots, -\frac{2015}{2} = -1008 + \frac{1}{2}$	1p
	$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \dots = f\left(-\frac{2015}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Suma cerută este: $1008 \cdot \frac{1}{2} = 504.$	2p

	b) $\frac{x+2}{3} = k, k \in N^* \Rightarrow x = 3k - 2$	1p
	Avem $\left[\sqrt{\frac{3k-2+5}{3}} \right] = k$ de unde obținem $\left[\sqrt{k+1} \right] = k$ și $k \leq \sqrt{k+1} < k+1$	1p
	$k \leq \sqrt{k+1} \Rightarrow k \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right], k \in N^* \Rightarrow k = 1(1)$ $\sqrt{k+1} < k+1$ adevărat pentru orice $k > 0(2)$	2p
	Din (1) și (2) rezultă că $S = \{1\}$.	1p
4.)	Din oficiu	1p
	Fie $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$	1p
	a) Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}}{1+k}, \overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC} + k \cdot \overrightarrow{BA}}{1+k}, \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{CB}}{1+k}$ de unde obținem: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{1+k} + k \cdot \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}}{1+k} = \vec{0}$ condiția suficientă pentru ca segmentele AM, BN și CP să constituie laturile unui triunghi.	3p
	b) Analog cu punctul a) avem: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{OC}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OC} + k \cdot \overrightarrow{OA}}{1+k} + \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1+k} = \frac{(1+k)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}{1+k} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	2p
	c) Fie G și G' centrul de greutate al triunghiurilor ABC și MNP . Avem $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG'} \end{array} \right\} \stackrel{b)}{=} \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG'} \Rightarrow G = G'$	3p