S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a

I. TÉTEL

Számítsátok ki az alábbi számot, és mutassátok meg, hogy racionális szám:

$A=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$

II. TÉTEL

Bizonyítsátok be:

a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$; bármely $n\in N^*$ esetén

b) $\frac{2013}{1\cdot 2}+\frac{2012}{2\cdot 3}+\frac{2011}{3\cdot 4}+...\frac{2}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$

III. TÉTEL

Az ABC háromszögben AM oldalfelező, illetve MD és ME az AMB illetve AMC szögek szögfelezői ($D\in AB$, $E\in AC$). Jelöljük N , illetve P-vela D és E pontok vetületeit az AM-re. Mutassátok ki, hogy DP és EN párhuzamosak.

(G. M. nr 6-7-8, 2013)

IV. TÉTEL

Legyenek az A,B,C,D pontok úgy, hogy $AB \parallel CD$ és $CD=\frac{AB}{2}$. Legyen $AD\cap BC=\{E\}$ és két különböző F és G pont, amelyek szimmetrikusakC szerint, $F,G\notin BC$. Mutassátok ki, hogy az EG és BF egyenesek:

a) párhuzamosak, ha A és D pontok a BC egyenes ugyanazon oldalán vannak;
b) metszik egymást a [BF] szakasz felezési pontjában, ha A és D pontok a BC egyenes két különböző oldalán vannak.

Constantin Bozdog,Reghin

Megjegyzés

Minden feladat kötelező.
Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.
Munkaidő 3 óra.

Probleme selectate de: prof. Angela Stoica. prof. Cornelia Căpușan, prof. Constantin Bozdog

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a
Bareme de corectare

Subiectul I

Calculați numărul și arătați că este rațional:

A=$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$

Soluție:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$
. . .

$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}=\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{4096575}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$ .... (3p)

Prin însumare se obține A=1-$\frac{1}{\sqrt{2025}}$ .... (3p)

Finalizare A=$\frac{44}{45}\in Q$ .... (1p)

Subiectul II

Arătați că :

a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ aricare ar fi n∈N*

b) $\frac{2013}{1\cdot2}+\frac{2012}{2\cdot3}+\frac{2011}{3\cdot4}+...\frac{2}{2012\cdot2013}+\frac{1}{2013\cdot2014}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$

Soluție:

a)$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{n^2-n^2+1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ deci propoziția este adevărată .... (3p)

b) se aplică relația pentru fiecare fracție

$$\frac{2013}{1\cdot2}=2013\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{2012}{2\cdot 3}=2012\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{2011}{3\cdot 4}=2011(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

. . .

$\frac{1}{2013\cdot 2014}=(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})$ ....(2p)

Adunăm relațiile și obținem

S=2013-$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.\ .\ .-\frac{1}{2014}=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}+.\ .\ .+1-\frac{1}{2014}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+.\ .\ .+\frac{2013}{2014}$ .... (2p)

Subiectul III

În triunghiul ABC , AM este mediană , iar MD și ME sunt bisectoarele unghiurilor AMB respectiv AMC (D $\in$ AB, E$\in$ AC). Notăm cu N , respectiv P proiecțiile punctelor D si E pe AM . Arătați că DP și EN sunt paralele.

(gazeta matematica nr 6-7-8, 2013)

Soluție:

În triunghiurile ABM și AMC scriem teorema bisectoarei pentru bisectoarea MD respectiv ME și obținem:

$\frac{BM}{MA}=\frac{BD}{DA}$ respectiv $\frac{CM}{MA}=\frac{CE}{EA}$ (1)………..… 2p

AM mediana deci MB=MC , si inlocuim si aplicăm Reciproca Thales si deducem ca DE si BC sunt paralele………...………1p

Notam cu O intersectia dintre AM si DE.

Obținem că triunghiurile ADO și ABM sunt asemenea și deci $\frac{AD}{AB}=\frac{AO}{AM}=\frac{DO}{BM}$ (2)

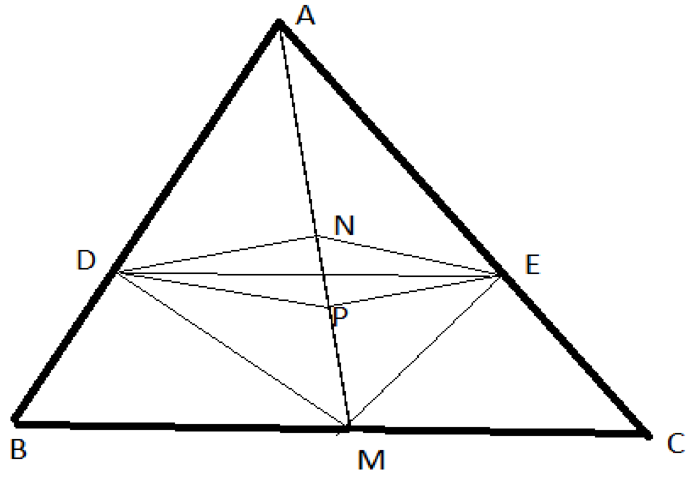
iar triunghiurile AOE și AMC sunt asemenea și deci

$\frac{AO}{AM}=\frac{AE}{AC}=\frac{OE}{MC}$ (3)

Din relatiile 1,2 , 3 deducem ca DO =OE . ……..….2p

Din congruenta triunghiurilor dreptunghice OPE și OND (cazul IU) avem că OP și ON sunt congruente..……..……1p

În patrulaterul DPEN avem DO =OE si OP=ON deci DPEN este paralelogram de unde concluzia ………………..………………1p.



Subiectul IV

Fie punctele A,B,C,D astfel incat AB$\|$ CD si CD=$\frac{AB}{2}$. Fie AD$\cap$BC={E} si doua puncte diferite F si G simetrice fata de C, unde F,G$\notin$BC. Aratati ca dreptele EG si BF sunt:

a) paralele dacă A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC;

b) concurente in mijlocul segmentului [BF], dacă A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

Constantin Bozdog,Reghin

Soluție:

Teorema fundamentală a asemanarii in ΔABE (CD$\|$ AB): ΔABE~ΔDCE

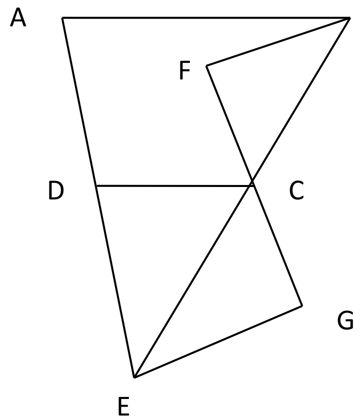
$\Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ 2p

a) A si D de aceeasi parte a dreptei BC

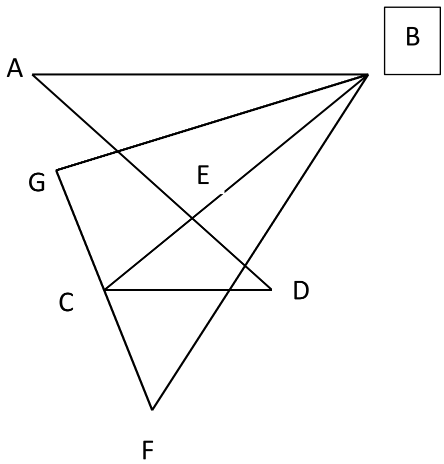
$\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ BC=CE

Dar CF=CG, deci BFEG paralelogram

$\Rightarrow BF\|EG$ ………………………………………….2p



b) A si D de o parte si de alta a dreptei BC



$\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$

CF=CG, deci E este centru de greutate in Δ BFG………………………………..........................2p

$\Rightarrow$ GE mediana $\Rightarrow$ GE contine mijlocul segmentului [BF]……………………..................1p

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem