Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a X-a

Subiectul I

Subiectul I

Se consideră func□iile $f, g: \square \to \square, f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}, g(x) = 4x + 2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5x^2 + 4x\sqrt{x^2+1} + 2}$. Să se demonstreze că f □i g sunt bijective.

Subiectul II

Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [2,3]$. Arăta□i că

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n, n \geq 1$$

Subiectul III

Arăta□i că, dacă $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ □i $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n|$, atunci

$$\left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)\left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbb{R}.$$

Subiectul IV

Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $z_1 \neq z_2$ astfel încât $|z_1| = |z_2|, z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbf{R},\ z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbf{R}$. Arăta□i că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbf{R},\ z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbf{R}$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Barem Clasa a X-a

SUBIECTUL I Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}, g(x)=4x+2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5x^2+4x\sqrt{x^2+1}+2}$. Să se demonstreze că f și g sunt bijective.

Soluție. $f(x)=y\Rightarrow y^2-4xy+3x^2-1=0, \Delta=4x^2+4>0\Rightarrow f$ surjectivă 2p

$x>y>0\Rightarrow f(x)>f(y)$

$x>0>y\Rightarrow f(x)>f(0)>f(y)$ $\quad\Rightarrow f$ injectivă.....................3p

$x<y<0\Rightarrow f(x)<f(y)$

Deci, f bijectivă. Funcția $g=f\circ f\Rightarrow g$ bijectivă.....................................2p

SUBIECTUL II Fie numerele reale $a_1,a_2,a_3,....,a_n\in[2,3]$. Arătați că

$\log_{a_1}(5a_2-6)+\log_{a_2}(5a_3-6)+...+\log_{a_{n-1}}(5a_n-6)+\log_{a_n}(5a_1-6)\geq 2n, n\geq 1$

Soluție. cum $a_i\in[2,3]\Rightarrow a_i^2-5a_i+6\leq 0\Rightarrow 5a_i-6\geq a_i^2$ 2p

logaritmăm inegalitatea , deci $\log_{a_i}(5a_{i+1}-6)\geq\log_{a_i}a_{i+1}^2=2\log_{a_i}a_{i+1}$, cu $a_{n+1}=a_1$ 1p

adunăm inegalitățile

$\Rightarrow\log_{a_1}(5a_2-6)+\log_{a_2}(5a_3-6)+...+\log_{a_n}(5a_1-6)\geq 2\left(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_3+...+\log_{a_{n-1}}a_n+\log_{a_n}a_1\right)$

........................1p

aplicând inegalitatea mediilor obținem

$2\left(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_3+...+\log_{a_{n-1}}a_n+\log_{a_n}a_1\right)\geq 2n\sqrt[n]{\log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdot...\cdot\log_{a_{n-1}}a_n\cdot\log_{a_n}a_1}=2n$

..............3p

SUBIECTUL III Arătați că, dacă $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ și $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|$, atunci

$$\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right)\in\mathbb{R}.$$

Soluție. Dacă notăm cu z produsul , atunci încercăm să demonstrăm că $\bar{z}=z$ ceea ce va implica $z\in\mathbb{R}$. …(2p)

Avem $\bar{z} = \left(1+\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}\right)\left(1+\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\overline{z_n}}{\overline{z_{n-1}}}\right)\left(1+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_n}}\right)$ ....(1p)

Dar $\frac{\overline{z_{k+1}}}{\overline{z_k}} = \frac{\frac{|z_{k+1}|^2}{z_{k+1}}}{\frac{|z_k|^2}{z_k}} = \frac{z_k}{z_{k+1}}$ .....(2p)

Atunci $\bar{z} = \left(1+\frac{z_1}{z_2}\right)\left(1+\frac{z_2}{z_3}\right)\cdots\left(1+\frac{z_{n-1}}{z_n}\right)\left(1+\frac{z_n}{z_1}\right) =$

$= \frac{z_2+z_1}{z_2}\cdot\frac{z_3+z_2}{z_3}\cdot\ldots\cdot\frac{z_n+z_{n-1}}{z_n}\cdot\frac{z_1+z_n}{z_1} =$

$= \frac{z_1+z_2}{z_1}\cdot\frac{z_2+z_3}{z_2}\cdot\ldots\cdot\frac{z_n+z_1}{z_n} = \left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right) = z$ ....(2p)

SUBIECTUL IV Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $z_1 \neq z_2$ astfel încât $|z_1| = |z_2|, z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbf{R},\ \ z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbf{R}$.

Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbf{R},\ \ z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbf{R}$.

Soluție. $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ z_2 = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ și $z_1 + \frac{1}{z_2} \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{\cos\beta - i\sin\beta}{r} \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow r\sin\alpha - \frac{\sin\beta}{r} = 0 \Rightarrow r^2\sin\alpha = \sin\beta$. 2p

$z_2 + \frac{1}{z_1} \in \mathbf{R} \Rightarrow r^2\sin\beta = \sin\alpha$ 1p

Deci $\Rightarrow r^4\sin\beta = \sin\beta \Rightarrow \beta = k\pi,\ k\in\mathbf{Z} \Rightarrow \alpha = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ 1p

Deci $z_1 = r$ și $z_2 = -r$, sau invers, de unde $z_1^{2n+1} + \frac{1}{z_2^{2n+1}} \in \mathbf{R},\ \ z_2^{2n+1} + \frac{1}{z_1^{2n+1}} \in \mathbf{R}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.......2p

Dacă r =1 $\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ de unde rezultă că $z_1 = z_2$, fals. ..1p

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem