

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

CLASA a X-a

1. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(f(x)y) + xy = 2f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Să se demonstreze că $\frac{\log_2^2 a}{1 + \log_2 b^2} + \frac{\log_2^2 b}{1 + \log_2 c^2} + \frac{\log_2^2 c}{1 + \log_2 a^2} \geq 1, \forall a, b, c \in [2, \infty)$.

3. Să se determine numerele complexe x, y, z , dacă
$$\begin{cases} xy = z^2 + 2z - x - y \\ xz = y^2 + 2y - x - z \\ yz = x^2 + 2x - y - z \end{cases}$$

4. Fie a, b, c trei numere complexe distincte cu proprietatea: $|a| = |b| = |c| = |a + b + c|$. Să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a, b , respectiv c este dreptunghic.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a X-a**

1. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(f(x)y) + xy = 2f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

G.M. 9/2013, enunț modificat

Soluție. $y = 0 \Rightarrow f(0) = 2f(x)f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0$ sau $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum funcția constantă nu verifică relația din enunț, în mod obligatoriu avem $f(0) = 0$. Considerăm $y = 1$ în relația dată și obținem

$$f(f(x)) + x = 2f(x)f(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Arătăm că f este funcție injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b))$. Folosind relația (1) pentru $x = a$ și $x = b$ se obține imediat că $a = b$.

Schimbând x cu y în relația din ipoteză obținem:

$$f(f(y)x) + xy = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ deci}$$

$$f(f(x)y) = f(f(y)x), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

de unde, folosind injectivitatea funcției deducem: $f(x)y = xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru $y=1$ obținem $f(x) = xf(1)$ și înlocuind în relația inițială rezultă

$$xy \cdot f^2(1) + xy = 2xy \cdot f^2(1), \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xy = xy \cdot f^2(1), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f^2(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \pm 1.$$

În concluzie, funcțiile cerute sunt $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x, f_2(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Barem.

| | |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Deduce $f(0) = 0$ | 1p |
| f este funcție injectivă | 2p |
| Deduce $f(x)y = xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ | 2p |
| Finalizare-găsește funcțiile..... | 2p |

2. Să se demonstreze că $\frac{\log_2^2 a}{1 + \log_2 b^2} + \frac{\log_2^2 b}{1 + \log_2 c^2} + \frac{\log_2^2 c}{1 + \log_2 a^2} \geq 1, \forall a, b, c \in [2, \infty)$.

Soluție. Aplicăm inegalitatea CBS și obținem:

$$\frac{\log_2^2 a}{1 + \log_2 b^2} + \frac{\log_2^2 b}{1 + \log_2 c^2} + \frac{\log_2^2 c}{1 + \log_2 a^2} \geq \frac{(\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c)^2}{3 + 2(\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c)} = \frac{\log_2^2(abc)}{3 + 2\log_2(abc)} \geq 1.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $(\log_2(abc) - 1)^2 \geq 4$, adevărat, deoarece $\log_2(abc) \geq \log_2 8 = 3$.

Barem.

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Aplică CBS și obține $\frac{\log_2^2 a}{1 + \log_2 b^2} + \frac{\log_2^2 b}{1 + \log_2 c^2} + \frac{\log_2^2 c}{1 + \log_2 a^2} \geq \frac{\log_2^2(abc)}{3 + 2\log_2(abc)}$ | 5p |
| Demonstrează $\frac{\log_2^2(abc)}{3 + 2\log_2(abc)} \geq 1$ | 2p |

3. Să se determine numerele complexe x, y, z , dacă
$$\begin{cases} xy = z^2 + 2z - x - y \\ xz = y^2 + 2y - x - z \\ yz = x^2 + 2x - y - z \end{cases}$$

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

Soluție. Relația $xy = z^2 + 2z + 1 - 1 - x - y \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = (z+1)^2$ sugerează substituțiile $x+1 = a$,

$y+1 = b, z+1 = c$ și sistemul devine:
$$\begin{cases} ab = c^2 \\ ac = b^2, a, b, c \in \mathbb{C}. \text{ Considerăm cazurile:} \\ bc = a^2 \end{cases}$$

I. $a = 0 \Rightarrow b = c = 0$.

II. $a \neq 0 \Rightarrow b, c \neq 0$. În acest caz, sistemul este echivalent cu $a^3 = b^3 = c^3 = abc$.

Observăm că tripletul $(a, a, a), a \in \mathbb{C}^*$ este soluție a sistemului.

Dacă cel puțin două dintre numerele a, b, c sunt distincte, atunci deducem că toate cele trei numere sunt distincte. În acest caz, $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(\frac{c}{a}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ sunt rădăcinile complexe nereale de ordin trei ale unității.

Astfel, $(a, b, c) = (z_1, z_2, z_3)$, unde $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ sunt numere complexe în mulțimea $\{t, \omega t, \omega^2 t\}, t \in \mathbb{C}^*$,

și $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Astfel, soluțiile sunt $(x, y, z) \in \{(z, z, z), (z_1 - 1, z_2 - 1, z_3 - 1)\}, z \in \mathbb{C}$,

z_1, z_2, z_3 precizate mai sus.

Barem.

| | |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Reduce sistemul la o formă mai simplă | 2p |
| (z, z, z) este soluție a sistemului..... | 1p |
| Determină forma soluțiilor (x, y, z) , cu componente distincte..... | 4p |

4. Fie a, b, c trei numere complexe distincte cu proprietatea: $|a| = |b| = |c| = |a + b + c|$. Să se arate că triunghiul cu vârfurile de afixe a, b , respectiv c este dreptunghic.

Soluție 1. Fie $a = r(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), b = r(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), c = r(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3), r > 0, \varphi_i \in [0, 2\pi), i = \overline{1, 3}$.

Avem $|a + b + c| = r \Leftrightarrow (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$3 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}\right) = 0.$$

Dacă, de exemplu, presupunem $\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 0$, atunci

$$a + b = r(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1 + i \sin \varphi_2) = 2r \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right) = 0. \text{ Analog,}$$

în celelalte cazuri, vom obține $b + c = 0$, respectiv $a + c = 0$.

Deoarece afixele vârfurilor triunghiului au același modul, centrul cercului circumscris triunghiului coincide cu originea O a sistemului de coordonate. Din relațiile găsite deducem că O coincide cu mijlocul unei laturi, deci triunghiul este dreptunghic.

Soluție 2. Folosim produsul real a două numere complexe $u \cdot v = \frac{1}{2}(\bar{u}v + u\bar{v})$.

$$|a| = |b| = |c| = |a + b + c| \Rightarrow |a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = |a + b + c|^2 \Leftrightarrow a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = (a + b + c) \cdot (a + b + c).$$

Prin efectuarea calculelor se obțin relațiile $(a + b) \cdot (b + c) = 0, (a + b) \cdot (a + c) = 0, (a + c) \cdot (b + c) = 0$. Dacă notăm $a + b + c = h$ afixul ortocentrului H, obținem $(h - a) \cdot (h - b) = 0$ și analogele. Dacă H nu coincide cu niciun vârf al triunghiului, atunci deducem că $AH \perp BH \perp CH \perp AH$, absurd. În concluzie, ortocentrul triunghiului coincide cu unul dintre vârfurile triunghiului și triunghiul este dreptunghic.

Barem. (pentru soluția 1)

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Scrie numerele sub formă trigonometrică..... | 1p |
| Deduce $\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}\right) = 0$ | 3p |
| Deduce că cel puțin unul dintre numerele $a + b, a + c, b + c$ este egal cu 0..... | 2p |
| Finalizare..... | 1p |

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.