

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA, 16 februarie 2013**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**  
**CLASA a XI-a**

1. Fie  $A, B, C$  trei matrice pătratice de ordin  $n$ ,  $n \geq 2$ , cu elemente din mulțimea numerelor reale, care satisfac egalitatea  $ABC + A + B + C = AB + AC + BC$ . Arătați că matricea  $A$  este inversabilă dacă și numai dacă matricea  $BC - B - C$  este inversabilă.

*Anca Andrei, Suceava*

**Soluție.**

$$ABC + A + B + C = AB + AC + BC \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n)(C - I_n) = -I_n \Rightarrow \det(A - I_n) \neq 0.$$

Pe de altă parte  $ABC + A + B + C = AB + AC + BC \Rightarrow (A - I_n)(BC - B - C) = -A$ , de unde deducem că  $\det(A - I_n) \cdot \det(BC - B - C) = (-1)^n \det A$ . Cum  $\det(A - I_n) \neq 0$  rezultă că  $\det A \neq 0$  dacă și numai dacă  $\det(BC - B - C) \neq 0$ .

**Barem.**

Obține $(A - I_n)(B - I_n)(C - I_n) = -I_n$	2 p
Deduce $\det(A - I_n) \neq 0$	1 p
Obține $(A - I_n)(BC - B - C) = -A$	2 p
Deduce $\det(A - I_n) \cdot \det(BC - B - C) = (-1)^n \det A$	1 p
Finalizare	1 p

2. a) Aflați valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix}.$$

(\*\*\*)

- b) Notăm cu  $a, b, c$  lungimile laturilor  $BC, AC, AB$  ale triunghiului  $ABC$ . Arătați că valoarea

determinantului  $\Delta = \begin{vmatrix} -a & a - 2c \cos B & a \\ b & -b & b - 2a \cos C \\ c - 2b \cos A & c & -c \end{vmatrix}$  este zero.

*Supliment, G.M. 11/2012*

**Soluție.**

a) 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 - c_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 43 & 5 \\ 6 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 8c_1 \\ c_4 - 4c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 11 & -11 \\ 6 & 0 & 0 & 61 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 61 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$$

- b) Înmulțind prima linie a lui  $\Delta$  cu  $a$ , a doua cu  $b$  și a treia cu  $c$  obținem:

$$abc \cdot \Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2ac \cos B & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 - 2abc \cos C \\ c^2 - 2bc \cos A & c^2 & -c^2 \end{vmatrix}.$$

Adunând primele două linii la a treia găsim:

$$abc \cdot \Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2ac \cos B & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 - 2ab \cos C \\ b^2 + c^2 - 2bc \cos A - a^2 & a^2 + c^2 - 2ac \cos B - b^2 & a^2 + b^2 - 2ab \cos C - c^2 \end{vmatrix}.$$

Dar  $b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2$ ,  $a^2 + c^2 - 2ac \cos B = b^2$ ,  $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$  (din teorema

cosinusului). Rezultă  $abc \cdot \Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2ac \cos B & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 - 2ab \cos C \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ , de unde  $\Delta = 0$ .

**Barem.**

Găsește că valoarea determinantului este 2013		3 p
Scrie teorema cosinusului		1 p
Obține $abc \cdot \Delta =$	$\begin{vmatrix} -a^2 & a^2 - 2ac \cos B & a^2 \\ b^2 & -b^2 & b^2 - 2ab \cos C \\ c^2 - 2bc \cos A & c^2 & -c^2 \end{vmatrix}$	2 p
Finalizare		1 p

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  o funcție surjectivă și crescătoare.

a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f^2(2) + f^3(3) + \dots + f^n(n)}{f^n(n)}$ .

Dan Popescu, Suceava

**Soluție.**

a) Arătăm că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât  $f(x) > \varepsilon, \forall x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$ . Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Din ipoteza de surjectivitate există  $x_\varepsilon$  astfel încât  $f(x_\varepsilon) = \varepsilon + 1 > \varepsilon$ . Notăm cu  $\delta_\varepsilon = \max(1, x_\varepsilon) \geq 1 > 0$  și fie  $x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$  oarecare. Atunci  $x \geq x_\varepsilon$  și cum  $f$  este crescătoare deducem că  $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \varepsilon$ . În concluzie,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

b) Notăm cu  $x_n = \frac{f(1) + f^2(2) + f^3(3) + \dots + f^n(n)}{f^n(n)}$ . Observăm că  $x_n \geq \frac{f^n(n)}{f^n(n)} = 1$  și

$$1 \leq x_n \leq \frac{f(n) + f^2(n) + f^3(n) + \dots + f^n(n)}{f^n(n)} = \frac{f(n) \cdot (1 + f(n) + f^2(n) + \dots + f^{n-1}(n))}{f^n(n)} =$$

$$= \frac{f(n)}{f(n) - 1} \cdot \frac{f^n(n) - 1}{f^n(n)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(n)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{f(n)}\right).$$

Ținând cont că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (cf. a))

deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{f(n)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{f(n)}\right) = 1$ . Rezultă din lema cleștelui că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Barem.**

Arată că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$		3 p
Obține $x_n \geq 1$ , unde $x_n =$	$\frac{f(1) + f^2(2) + f^3(3) + \dots + f^n(n)}{f^n(n)}$	1 p

Obține $x_n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{f(n)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{f^n(n)}\right)$	2 p
Finalizare	1 p

4. Fie  $M$  o mulțime infinită de numere reale cu proprietatea că pentru orice submulțime finită  $S \subset M$  este îndeplinită condiția  $\sum_{x \in S} |x| \geq (\text{card } S)^2$ , unde  $|x|$  reprezintă modulul numărului real  $x$ , iar  $\text{card } S$  reprezintă numărul de elemente ale mulțimii  $S$ .
- a) Arătați că există un șir  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu elemente din  $M$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .
- b) Arătați că mulțimea  $M$  este numărabilă.

*Marius Marchitan, Suceava*

**Soluție.**

- a) Presupunem că există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel ca  $M \cap ((-\infty, -k] \cup [k, \infty)) = \emptyset$ . Deducem că  $M \subset (-k, k)$ . Cum  $M$  este infinită, putem alege o submulțime cu  $k$  elemente  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  a lui  $M$ . Atunci  $\sum_{x \in S} |x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| < k \cdot k = (\text{card } S)^2$ , ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că presupunerea este falsă, deci  $M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Putem alege pentru fiecare  $n \geq 1$  un element  $a_n \in M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty))$ . Observăm că  $|a_n| \geq n, \forall n \geq 1$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .
- b) Fie  $M_n = M \cap (-n, n), n \geq 1$ . Presupunem că există  $k \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\text{card } M_k \geq k$ . Putem alege o submulțime  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M_k \subset M$ . Atunci  $\sum_{x \in S} |x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| < k \cdot k = (\text{card } S)^2$ , ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că presupunerea este falsă, deci  $\text{card } M_n < n, \forall n \geq 1$ . Prin urmare, am găsit, pentru fiecare  $n \geq 1$ , submulțimile  $M_n \subset M$ , finite. Evident  $\bigcup_{n \geq 1} M_n \subset M$ . De asemenea, pentru orice  $x \in M$ , există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|x| < n$  (spre exemplu  $n = [ |x| ] + 1$ ), adică  $x \in M_n$ . Deducem că și  $M \subset \bigcup_{n \geq 1} M_n$ , de unde  $M = \bigcup_{n \geq 1} M_n$ . Cum  $M$  este o reuniune numărabilă de mulțimi finite, rezultă că  $M$  este numărabilă.

**Barem.**

Arată că $M \cap ((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2 p
Arată existența unui șir $(a_n)_{n \geq 1} \subset M$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty}  a_n  = \infty$	1 p
Arată că $\text{card } M_n < n, \forall n \geq 1$ , unde $M_n = M \cap (-n, n), n \geq 1$	2 p
Arată că $M = \bigcup_{n \geq 1} M_n$	1 p
Finalizare	1 p

*Notă:*

*Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.*

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA**  
**16 februarie 2013**

**CLASA a XI-a**

1. Fie  $A, B, C$  trei matrice pătratice de ordin  $n$ ,  $n \geq 2$ , cu elemente din mulțimea numerelor reale, care satisfac egalitatea  $ABC + A + B + C = AB + AC + BC$ . Arătați că matricea  $A$  este inversabilă dacă și numai dacă matricea  $BC - B - C$  este inversabilă.

2. a) Aflați valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 13 & 8 \\ 9 & 8 & 43 & 5 \\ 91 & 12 & 48 & 85 \end{vmatrix}.$$

- b) Notăm cu  $a, b, c$  lungimile laturilor  $BC, AC, AB$  ale triunghiului  $ABC$ . Arătați că valoarea

determinantului  $\Delta = \begin{vmatrix} -a & a - 2c \cos B & a \\ b & -b & b - 2a \cos C \\ c - 2b \cos A & c & -c \end{vmatrix}$  este zero.

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  o funcție surjectivă și crescătoare.

a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f^2(2) + f^3(3) + \dots + f^n(n)}{f^n(n)}$ .

4. Fie  $M$  o mulțime infinită de numere reale cu proprietatea că pentru orice submulțime finită  $S \subset M$  este îndeplinită condiția  $\sum_{x \in S} |x| \geq (\text{card } S)^2$ , unde  $|x|$  reprezintă modulul numărului real  $x$ , iar  $\text{card } S$  reprezintă numărul de elemente ale mulțimii  $S$ .

a) Arătați că există un șir  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu elemente din  $M$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ .

- b) Arătați că mulțimea  $M$  este numărabilă.

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**

**3. Timp de lucru 3 ore.**