Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a XI a

1. Se spune că două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, sunt ***rude de gradul k,*** $k \in \mathbb{N}$**,** dacă

$$AB = BA \text{ şi } \det(A^2 + B^2) = k .$$

   a) Arătaţi că există cel puţin două matrice A şi B nenule care sunt ***rude de gradul 1.***
   b) Demonstraţi că, dacă două matrice A şi B sunt ***rude de gradul 0,*** atunci $\det A = \det B$.
   c) Stabiliţi o altă cerinţă având în vedere enunţul oferit !
   (Adică vi se cere să creaţi o mini sau o maxi problemă...)

Lucian Dragomir

2. Se consideră $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB + BA = O_3$ şi $P(x) = \det(A + xB)$.

   Arătaţi că $P(i) \in \mathbb{R}$ sau $\dfrac{P(i)}{i} \in \mathbb{R}$.

RMT 2/2011

3. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n \geq 1, y_n \geq 1,$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n{}^2 + y_n{}^2\right) = 2.$ Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Gazeta Matematică 1/2013

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right].$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada naţională de matematică, Etapa locală, 15 februarie 2014,Clasa a XI a, Barem de evaluare

(1) a) de exemplu $A = I_2$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (verificare !); evident, orice alt exemplu corect este luat în considerare !	(2p)
b) Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \det(A + xB) = (\det B) \cdot x^2 + mx + \det A$, $m \in \mathbb{R}$. Din $\det(A^2 + B^2) = 0$ deducem $\det(A + iB)\det(A - iB) = 0$, adică $f(i) = f(-i) = 0$ şi astfel $f(x) = k \cdot (x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Concluzia e imediată.	(3p)
c) chestiune de creaţie, aşadar aşteptăm să vedem ce sunt în stare elevii acestei generaţii ! oricum, probabil mai mult decât noi (în ceea ce priveşte creativitatea)… punctaţi ca atare !	(2p)
(2) $(A + iB)^2 = (A - iB)^2 \Rightarrow \det(A + iB) = \pm \det(A - iB)$	(3p)
aşadar $P(i) = \pm P(-i)$, deci $P(i) = \pm \overline{P(i)}$	(2p)
Dacă $P(i) = \overline{P(i)}$, atunci $P(i) \in \mathbb{R}$	(1p)
Dacă $P(i) = -\overline{P(i)}$, atunci $\frac{P(i)}{i} \in \mathbb{R}$.	(1p)
(3) $2 \le x_n - y_n \le \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}$ şi, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 2$	(4p)
Cum $1 \le x_n \le x_n + y_n - 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n - 1) = 1$ se ajunge la $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; analog $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$	(3p)
(4)	
$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow 1 - x < x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \le 1, \forall x > 0$ şi $1 - x > x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \ge 1, \forall x < 0$. Prin trecere la limită în origine, avem că ambele limite laterale sunt egale: $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 1$.	(7p)