# Etapa locală, Craiova, 9 februarie 2013

Clasa a VI-a

**Problema 1.**

Oficiu ........ 1p

$p=(a,b) \Rightarrow a=pa_1, b=pb_1, (a_1,b_1)=1, a_1<b_1$ ........ 1p

$a\cdot b=[a,b]\cdot(a,b), 20\cdot(a,b)=[a,b] \Rightarrow 20p=\dfrac{pa_1\cdot pb_1}{p} \Rightarrow a_1b_1=20$ ........ 2p

$a_1b_1=20, (a_1,b_1)=1, a_1<b_1 \Rightarrow a_1=1, b_1=20$ sau $a_1=4, b_1=5$ ........ 2p

I. $a_1=1$, $b_1=20$ nu convine ........ 1p

II. $a_1=4$, $b_1=5$

$(a,b)=p$ prim, $a,b$ de două cifre $\Rightarrow 2\le p<20 \Rightarrow p\in\{3,5,7,11,13,17,19\}$ ........ 1.5p

Soluţia: $a=12, b=15$; $a=20, b=25$; $a=28, b=35$; $a=44, b=55$; $a=52, b=65$; $a=68, b=85$; $a=76, b=95$ ........ 1.5p

**Total** ........ **10p**

**Problema 2.**

Oficiu ........ 1p

Fie $n, n+1, ..., n+99$ cele 100 de numere consecutive, $n\in\mathbb{N}$ ........ 1p

$S=n+(n+1)+...+(n+99)=50(2n+99)$ ........ 3p

$105=3\cdot5\cdot7 \mid S \Rightarrow 21=3\cdot7 \mid (2n+99)$ ........ 1p

$2n+99\ge 99$ şi condiţia de minim din ipoteza problemei $\Rightarrow 2n+99=105$ ........ 2p

$n=3 \Rightarrow$ numerele căutate sunt: 3,4,5,...100,101,102 ........ 2p

**Total** ........ **10p**

**Problema 3.**

Oficiu ........ 1p

a). $A=\{5,7,11,25\}$ ........ 1.5p

b). Fie $X$ o mulţime cu cel puţin 5 elemente

Elementele lui $X$ împărţite la 3 dau resturile $0,1,2$ ........ 1p

I. Trei elemente din $X$ dau acelaşi rest ........ 1p

Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3 ........ 1p

$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea $(P)$ ........ 0.5p

II. Cel mult două elemente din $X$ dau acelaşi rest ........ 1p

$\Rightarrow$ există trei elemente ce dau resturile $0,1,2$ la împărţirea cu 3 ........ 1p

Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3 ........ 1p

$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea $(P)$ ........ 0.5p

Nu există $X$ cu proprietatea $(P)$ astfel încât $card X\ge 5$ ........ 0.5p

**Total** ........ **10p**

**Problema 4.**

Oficiu ........ 1p

Fie $S_1, S_2$ suma distanţelor de la punctul $A$, respectiv $B$, la cele 2013 puncte

a). Toate punctele sunt la stânga lui A $\Rightarrow S_1<S_2$ ........ 2p

b). Toate punctele sunt la dreapta lui B $\Rightarrow S_1>S_2$ ........ 2p

c). $M_1,\ldots,M_i (1\le i\le 2012)$ la stânga lui $A$ şi $M_{i+1},\ldots,M_{2013}$ la dreapta lui $B$

$S_1=AM_1+AM_2+\cdots+AM_i+BM_{i+1}+BM_{i+2}+\cdots+BM_{2013}+(2013-i)AB$ ........ 1.5p

$S_2=AM_1+AM_2+\cdots+AM_i+BM_{i+1}+BM_{i+2}+\cdots+BM_{2013}+i\cdot AB$ ........ 1.5p

Dacă $S_1=S_2 \Rightarrow (2013-i)AB=i\cdot AB$ ........ 1p

$i=\dfrac{2013}{2}$ imposibil $\Rightarrow S_1\ne S_2$ ........ 1p

**Total** ........ **10p**

# Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VI-a

**Problema 1.**
Să se determine toate numerele naturale $a$ respectiv $b$, $a < b$, de două cifre, ştiind că $cmmdc(a,b)$ este un număr prim, de 20 de ori mai mic decât $cmmmc(a,b)$.

***

**Soluţie.** Fie $p = (a,b)$, număr prim. Atunci $a = pa_1$, $b = pb_1$ cu $(a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1$(pentru că $a < b$ din ipoteză. Din relaţia $a \cdot b = [a,b] \cdot (a,b)$ şi din enunţul problemei avem: $20(a,b) = [a,b]$, adică $20p = \frac{pa_1 \cdot pb_1}{p}$, de unde $a_1 b_1 = 20$. Cum $(a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1 \Rightarrow a_1 = 1$, $b_1 = 20$ sau $a_1 = 4$, $b_1 = 5$.
I. Cazul $a_1 = 1$, $b_1 = 20$ nu convine.
II. Cazul $a_1 = 4$, $b_1 = 5$. Din $(a,b) = p$ prim $\Rightarrow p \geq 2$. Dar $a$ şi $b$ sunt numere de două cifre $\Rightarrow p < 20$, adică $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ . Avem soluţiile:
$a = 12$, $b = 15$; $a = 20$, $b = 25$; $a = 28$, $b = 35$; $a = 44$, $b = 55$; $a = 52$, $b = 65$; $a = 68$, $b = 85$; $a = 76$, $b = 95$.

**Problema 2.**
Să se determine cele mai mici 100 numerele naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105.

***

**Soluţie.** Fie $n, n+1, ..., n+99$ cele 100 de numere consecutive, $n \in \mathbb{N}$. Atunci suma lor este $S = n + (n+1) + ... + (n+99) = 100n + \frac{99(99+1)}{2} = 100n + 50 \cdot 99 = 50(2n+99)$. Din $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid S$ rezultă că $21 = 3 \cdot 7 \mid (2n+99)$, unde $2n + 99 \geq 99$. Condiţia de minim din ipoteza problemei ne conduce la concluzia că $2n + 99 = 105$, de unde $n = 3$. Deci numerele căutate sunt: 3,4,5,...100,101,102.

**Problema 3.**
Spunem că o mulţime $X$ de numere naturale nenule are proprietatea $(P)$ dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea $(P)$, de forma $A = \{5, 7, a, b\}$.

b) Arătaţi că nu există mulţimi $X$ cu proprietatea $(P)$ astfel încât $cardX \geq 5$.

GM 4/2012

**Soluţie.**
a). Un exemplu de mulţime cu proprietatea din enunţ este $A = \{5, 7, 11, 25\}$ .
b). Fie $X$ o mulţime cu cel puţin 5 elemente cu proprietatea din enunţ. Elementele lui $X$ împărţite la 3 dau resturile $0, 1, 2$.
I. Dacă trei elemente din $X$ dau acelaşi rest la împărţirea la 3, atunci suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3. Deci suma nu este număr prim, şi astfel $X$ nu are proprietatea $(P)$.
II. Dacă cel mult două elemente din $X$ dau acelaşi rest la împărţirea la 3, atunci avem trei elemente care dau resturile $0, 1, 2$ la împărţirea cu 3. Suma acestor trei

elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3, deci nu este număr prim, şi astfel $X$ nu are proprietatea $(P)$. Nu există astfel mulţimi $X$ cu proprietatea $(P)$ astfel încât $card X \geq 5$.

**Problema 4.**

Pe dreapta $d$ se iau punctele distincte $A$ şi $B$, iar pe $AB \backslash [AB]$ se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul $A$ la cele 2013 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul $B$ la cele 2013 puncte.

***

**Soluţie.** Fie $S_1$,$S_2$ suma distanţelor de la punctul $A$ respectiv $B$ la cele 2013 puncte.

a). Toate punctele sunt la stânga lui A. Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013}$ iar $S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013} = (BA + AM_1) + \cdots + (BA + AM_{2013}) = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} + 2013 \cdot AB$. Observăm că $S_1 < S_2$.

b). Toate punctele sunt la dreapta lui B. Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} = (AB + BM_1) + (AB + BM_2) + \cdots + (AB + BM_{2013}) = 2013AB + BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013}$ iar $S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013}$. Observăm că $S_1 > S_2$.

c). Considerăm că $M_1, \ldots, M_i$ $(1 \leq i \leq 2012)$ sunt la stânga lui $A$ şi $M_{i+1}, \ldots,$ $M_{2013}$ sunt la dreapta lui $B$.

Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + (AB + BM_{i+1}) + (AB + BM_{i+2}) + \cdots + (AB + BM_{2013}) = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + (2013 - i)AB$ şi

$S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013} = (BA + AM_1) + \cdots + (BA + AM_i) + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + i \cdot AB$.

Dacă $S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - i)AB = i \cdot AB$, adică $i = \dfrac{2013}{2}$ imposibil, deci $S_1 \neq S_2$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

# Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
## Craiova, 9 februarie 2013
## Clasa a VI-a

**Problema 1.**
Să se determine toate numerele naturale $a$ respectiv $b$, $a < b$, de două cifre, ştiind că $cmmdc(a, b)$ este un număr prim, de 20 de ori mai mic decât $cmmmc(a, b)$.

***

**Problema 2.**
Să se determine cele mai mici 100 numerele naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105.

***

**Problema 3.**
Spunem că o mulţime $X$ de numere naturale nenule are proprietatea $(P)$ dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea $(P)$, de forma $A = \{5, 7, a, b\}$.

b) Arătaţi că nu există mulţimi $X$ cu proprietatea $(P)$ astfel încât $cardX \geq 5$.

GM 4/2012

**Problema 4.**
Pe dreapta $d$ se iau punctele distincte $A$ şi $B$, iar pe $AB \setminus [AB]$ se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul $A$ la cele 2013 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul $B$ la cele 2013 puncte.

***

**Notă:**
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 2 ore.