Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a

1. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi legea de compoziţie "$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ prin relaţia $x\circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $(\mathbb{R},\circ)$ este monoid comutativ;

b) Determinaţi numerele reale x cu proprietatea $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2013 \text{ ori de } x} = x$.

2. a) Calculaţi $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x}dx$, pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

b) Calculaţi $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx$.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit comutativ şi notăm cu e elementul său neutru. Fie $M=\left\{x\in G \middle| x^2=e\right\}$.

a) Demonstraţi că M reprezintă un subgrup a grupului $(G,\cdot)$;

b) Arătaţi că $\displaystyle\prod_{x\in G}x = \prod_{x\in M}x$;

c) Spunem că un element $a\in G$ are proprietatea „A”, dacă există un subgrup H a lui $(G,\cdot)$ astfel încât $\displaystyle\prod_{x\in H}x = a$.

Demonstraţi că mulţimea $\left\{a\in G \middle| a \text{ are proprietatea "A"}\right\}$ este subgrup a grupului $(G,\cdot)$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012 (enunţ modificat)

4. Fie funcţiile $f:[0,1]\to[0,\infty)$ şi $g:[0,1]\to(0,\infty)$ integrabile. Definim şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin $a_n=\displaystyle\int_0^1 f^n(x)g(x)dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Dacă f este continuă , demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, dacă şi numai dacă $f(x)\le 1$;

b) Demonstraţi că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a - barem

1. **a)** Se verifică axiomele monoidului **2p**

b) Avem $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{2013 \text{ ori}}=(x-a)^{2013}+a$; **2p**

Se obţine $x\in\{a-1,\ a, a+1\}$. **3p**

2. **a)** $\int\frac{\sin x+2\cos x}{2\sin x+\cos x}dx=\frac{4}{5}\int\frac{2\sin x+\cos x}{2\sin x+\cos x}dx+\frac{3}{5}\int\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}dx=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C$; **3p**

b) Se foloseşte schimbarea de variabilă $y=-x$. **4p**

3. **a)** Verificare. **2p**

b) Verificare. **2p**

c) Dacă $a=\prod_{x\in H}x$ deducem din punctul b) că a este element de ordin 2, deci mulţimea din enunț coincide cu mulţimea $M=\{x\in G|x^2=e\}$ şi de aici concluzia. **3p**

4. **a)** Dacă $f(x)\le 1$, atunci $a_{n+1}-a_n=\int_0^1 f^n(x)(f(x)-1)g(x)dx\le 0$, deci şirul este descrescător şi fiind pozitiv, este apoi convergent. **2p**

Dacă $f(x)>1$ şi f continuă, există $a\in[0,1]$ astfel încât $\min f=f(a)>1$. Atunci $a_n\ge f^n(a)\int_0^1 g(x)dx$, deci şirul nu poate fi convergent. **2p**

b) Din inegalitatea mediilor deducem că $f^{n+1}(x)+f^{n-1}(x)\ge 2f^n(x)$, deci $f^{n+1}(x)-f^n(x)\ge f^n(x)-f^{n-1}(x)$, de unde $a_{n+1}-a_n\ge a_n-a_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Dacă $a_{n+1}-a_n\le 0$, atunci şirul este descrescător, deci are limită, iar dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $a_{k+1}-a_k>0$, atunci $a_{n+1}-a_n>0$ pentru orice $n>k$, deci şirul va fi crescător şi din nou are limită. **3p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro