OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a IX-a

Subiectul I

Fie $a \in \mathbf{R}$. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $[x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] = a + [2x]$.

GM

Subiectul II

a) Fie $a \ge b \ge c \ge 0$, $d \ge 0$. Să se arate că $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c+d} \le \sqrt{3 \cdot (a+d)}$;

b) Fie $a, b, c \in [0, \infty)$ cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3}\cdot b} + \frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{3}\cdot c} + \frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{3}\cdot a} \ge \frac{1}{6}$$

Alexandru Cărnaru

Subiectul III

Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_n \in [-1,1]$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că

$\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + ... + \sqrt{1-x_n^2} \le \sqrt{n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}$.

***

Subiectul IV

a) Fie vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ necoliniari, cu proprietatea $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ și $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{0}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$. Să se arate că $x = y = z$.

b) Fie ABC un triunghi. Medianele AM, BN, CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele $D, E,$ respectiv F. Știind că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = \vec{0}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

GM

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a IX-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie $a \in \mathbf{R}$. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $[x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] = a + [2x]$.

GM

Soluție:

Cum $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, ecuația devine $[x]^2 - [x] - a = 0$.

Notăm $[x] = t \in \mathbf{Z} \Rightarrow t^2 - t - a = 0$ ... 2p

$\Delta = 1 + 4a$ Ecuația are soluții întregi pentru $1 + 4a = k^2 \Rightarrow 4a = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$, de unde $(k+1)(k-1) \in M_4$ pentru $k = 2p - 1$, $p \in \mathbf{N} \Rightarrow a = p(p-1)$ 3p

$t = p \Rightarrow x \in [p, p+1)$

$t = 1 - p \Rightarrow x \in [1-p, 2-p)$

Dacă a nu este de forma $p(p-1)$, $p \in \mathbf{N}$, ecuația nu are soluții. ... 2p

Subiectul II.a) Fie $a \geq b \geq c \geq 0$, $d \geq 0$. Să se arate că $\sqrt{a-b} + \sqrt{b-c} + \sqrt{c+d} \leq \sqrt{3(a+d)}$;

b) Fie $a, b, c \in [0, \infty)$ cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3b}} + \frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{3c}} + \frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{3a}} \geq \frac{1}{6}$$

Soluție:

a) Ridicăm la pătrat și obținem $2\sqrt{(a-b)(b-c)} + 2\sqrt{(b-c)(c+d)} + 2\sqrt{(c+d)(a-b)} \leq 2(a+d) \ldots$ 1p

Inegalitatea este adevărată aplicând de trei ori inegalitatea mediilor $2\sqrt{xy} \leq x + y$ și însumându-le.

Pentru $a = b = c = d = 0$ obținem egalitatea ... 2p

b) Știind că $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ și $a, b, c \in [0, \infty)$, rezultă că $a, b, c \in [0,1]$.

Avem $\sqrt{a} \geq a \geq a^4$ ... 1p

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{3b}} + \frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{3c}} + \frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{3a}} \geq \frac{a^4}{1+\sqrt{3b}} + \frac{b^4}{1+\sqrt{3c}} + \frac{c^4}{1+\sqrt{3a}} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3+\sqrt{3(a+b+c)}} \geq \frac{1}{6} \ \ldots \quad 2p$$

unde am folosit faptul că $a + b + c \leq \sqrt{3}$ utilizând inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$ ...1p

Subiectul III

Fie numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-1, 1]$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că

$\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \ldots + \sqrt{1-x_n^2} \leq \sqrt{n^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}$.

Soluție

Folosim inducție după k, natural

Pentru k=1, evident

Pentru k=2, avem $\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} \leq \sqrt{2^2 - (x_1+x_2)^2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ ... 3p

$P(k) \to P(k+1)$ conduce la

$\sqrt{k^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^2} + \sqrt{1 - x_{k+1}^2} \leq \sqrt{(k+1)^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1})^2}$ ... 2p

sau $\sqrt{k^2 - a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{(k+1)^2 - (a+b)^2}$, unde $a = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, b = x_{k+1}$

după ridicări la pătrat, obținem $(kb - a)^2 \geq 0$ ... 2p

Obs $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \le n^2$ și $ab \le k$ sunt deduse evident din datele problemei!

Subiectul IV

a) Fie vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ necoliniari, cu proprietatea $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ și $x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}=\vec{0}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$. Să se arate că $x=y=z$.

b) Fie ABC un triunghi. Medianele AM, BN, CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele $D, E,$ respectiv F. Știind că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b} \Rightarrow x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}-z\cdot\vec{a}-z\cdot\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow$
$\vec{a}(x-z)+\vec{b}(y-z)=\vec{0}$; cum $\vec{a}$ și $\vec{b}$ necoliniari, deducem $x=y=z\ldots$ 2p

b) Din asemănarea triunghiurilor $\Delta ABM, \Delta CDM$, obținem $\frac{AM}{MC}=\frac{BM}{MD}, AM\cdot MD=MC\cdot MB\ldots$1p

Fie $BC=a, AC=b, AB=c$; obținem $AM\cdot MD=\frac{a^2}{4}, MD=\frac{a^2}{4\cdot AM}\Rightarrow \overrightarrow{MD}=\frac{a^2}{4\cdot AM^2}\cdot\overrightarrow{AM}$, analog
$\overrightarrow{NE}=\frac{b^2}{4\cdot BN^2}\cdot\overrightarrow{BN}$ și $\overrightarrow{PF}=\frac{c^2}{4\cdot CP^2}\cdot\overrightarrow{CP}\ \ldots$ 2p

Cum $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}$, obținem $\frac{a^2}{4\cdot AM^2}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{b^2}{4\cdot BN^2}\cdot\overrightarrow{BN}+\frac{c^2}{4\cdot CP^2}\cdot\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

Deoarece $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, fiind mediane în triunghi, folosind formula medianei, obținem
$\frac{a^2}{4\cdot AM^2}=\frac{b^2}{4\cdot BN^2}=\frac{c^2}{4\cdot CP^2}\Rightarrow \frac{a^2}{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}=\frac{b^2}{2\cdot(c^2+a^2)-b^2}\ \ldots$ 1p

Finalizarea calculelor cu $a=b, a=c$, triunghiul ABC echilateral … 1p

Obs. Orice altă rezolvare se va puncta corespunzător.